

Numerické riešenie okrajových úloh

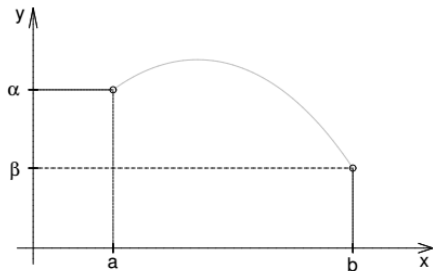
Pavol ORŠANSKÝ

12. decembra 2023

Okrajové úlohy

Pri **okrajových úlohách** je daná funkčná hodnota v oboch krajných hodnotách intervalu, t. j. budeme hľadať riešenie diferenciálnej rovnice druhého rádu na intervale $[a, b]$ s okrajovými podmienkami (teda vyhovúce dvom podmienkam)

$$y'' = F(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \quad (1)$$





"Science is a differential equation. Religion is a boundary condition." **Alan Turing**

Okrajové úlohy - numerické derivovanie

Najjednoduchším spôsobom odhadu derivácie v bode x_0 definovanej vzťahom

$$y'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}$$

je, pre $h \rightsquigarrow 0$, použiť jej prvú diferenciu, t. j.

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h}.$$

Z Taylorovho rozvoja f-cie v bode dostávame totožný vzťah

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \boxed{y'(x_0) \cdot h} + y''(x_0) \cdot \frac{h^2}{2} + \dots,$$

$$\boxed{y'(x_0) \cdot h} = y(x_0 + h) - y(x_0) - y''(x_0) \cdot \frac{h^2}{2} - \dots, \quad \Bigg/ \cdot \frac{1}{h}$$

$$y'(x_0) = \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} - \underbrace{\frac{h}{2} \cdot y''(x_0)}_{\text{chyba 1. rádu}} - \underbrace{\frac{h^2}{6} \cdot y'''(x_0) - \dots}_{\text{chyby vyššieho rádu}}$$

Iný spôsob hľadania aproximácie derivácie funkcie je nahradenie funkcie **Lagrangeovým interpolačným polynómom** príslušného rádu a jeho následnou deriváciou, t. j.

$$y(x) \approx L_n(x) \quad \Rightarrow \quad y^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x),$$

kde

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n l_{j,n}(x) \cdot y(x_j) \stackrel{\text{ozn.}}{=} \sum_{j=0}^n l_{j,n}(x) \cdot y_j.$$

Pre tento polynóm zrejme platí

$$y(x) = L_n(x) + \underbrace{\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi)}_{\text{chyba Lagrangeovho interpolačného polynómu}}, \quad x \in [x_0, x_n].$$

Predošlý vzťah zderivujeme a dostávame

$$\begin{aligned} y'(x) = & L'_n(x) + \left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} \right)' \cdot y^{(n+1)}(\xi) \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} \cdot \left(y^{(n+1)}(\xi) \right)', \end{aligned}$$

ak dosadíme za $x = x_i$ dostávame

$$\begin{aligned} y'(x_i) = & L'_n(x_i) + \left(\frac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)}{(n+1)!} \right)' \cdot y^{(n+1)}(\xi) \\ & + \underbrace{\frac{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_n)}{(n+1)!}}_{=0} \cdot \left(y^{(n+1)}(\xi) \right)', \end{aligned}$$

Odkiaľ po úprave dostávame tvar

$$\begin{aligned}y'(x_i) &= L'_n(x_i) + \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_j) \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \\ &= L'_n(x_i) + (-1)^{n+1} h^n i! (n-1)! \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

A teda platí

$$y'(x_i) = L'_n(x_i) + O(h^n),$$

a všeobecnejšie platí

$$y^{(k)}(x_i) = L_n^{(k)}(x_i) + O_k(h^{n+1-k}).$$

Použitím Lagrangeovho interpolačného polynómu druhého stupňa

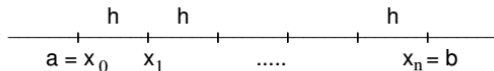
$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} \cdot y_i \\ &\quad + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1} \\ &= \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{h \cdot 2h} \cdot y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{h \cdot h} \cdot y_i \\ &\quad + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{2h \cdot h} \cdot y_{i+1}, \end{aligned}$$

po zderivovaní dostávame pre deriváciu

$$\begin{aligned} L_2'(x) = & \frac{(x - x_i) - (x - x_{i+1})}{2h^2} \cdot y_{i-1} \\ & + \frac{(x - x_{i-1}) - (x - x_{i+1})}{h^2} \cdot y_i \\ & + \frac{(x - x_{i-1}) - (x - x_i)}{2h^2} \cdot y_{i+1}. \end{aligned}$$

Okrajové úlohy - Metóda konečných diferencií (metóda sietí)

Interval $[a, b]$ rozdelíme ekvidištane na n rovnakých podintervalov šírky $h = (b - a) / n$ a riešenia hľadáme v tzv. uzlových bodoch $x_i = a + ih$, kde $i = 0, 1, 2, \dots, n$.



Predpokladáme platnosť rovnice (1) vo všetkých vnútorných uzlových bodoch, t. j.

$$y''(x_i) = F(x_i, y(x_i), y'(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Okrajové úlohy - Metóda konečných diferencií (metóda sietí)

Príslušné derivácie nahradíme diferenciami¹

$$\begin{aligned}y''(x_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \\ y'(x_i) &= \frac{y_{i-1} - y_{i+1}}{2h}\end{aligned}$$

a dostávame

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i-1} - y_{i+1}}{2h}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

čo spolu s okrajovými podmienkami dáva sústavu (vo všeobecnosti nelineárnu!!!) **diskretizačných rovníc** s neznámymi $y_1, \dots, y_{n-1}$, ktorú vyriešime.

¹ozn. $y_i = y(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Metodikou podrobnejšie popíšeme na okrajovej úlohe

$$-y'' + \sigma(x) \cdot y = f(x), \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta. \quad (2)$$

Veta (Riešiteľnosť okrajovej úlohy)

Ak sú funkcie $\sigma(x)$, $f(x)$ spojité na $[a, b]$ a $\sigma(x) \geq 0$ pre $x \in [a, b]$, potom okrajová úloha (2) má riešenie pre akékoľvek hodnoty α a β .

Odvodíme diskreditačné rovnice (ozn. $f(x_i) = f_i$, $\sigma(x_i) = \sigma_i$)

$$\begin{aligned} -\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \sigma_i \cdot y_i &= f_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ -y_{i+1} + (2 + h^2 \sigma_i) y_i - y_{i-1} &= h^2 f_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

Okrajové úlohy - Metóda konečných diferencií (metóda sietí)

Ak dosadíme z okrajových podmienok $y_0 = \alpha$ a $y_n = \beta$ dostaneme sústavu

$$\begin{aligned}(2 + h^2\sigma_1) y_1 - y_2 &= h^2 f_1 + \alpha, \\ -y_1 + (2 + h^2\sigma_2) y_2 - y_3 &= h^2 f_2, \\ -y_2 + (2 + h^2\sigma_3) y_3 - y_4 &= h^2 f_3, \\ &\vdots \\ -y_{n-2} + (2 + h^2\sigma_{n-1}) y_{n-1} &= h^2 f_{n-1} + \beta.\end{aligned}$$

Matica je tridiagonálna, symetrická a diagonálne dominantná.

Dá sa ukázať, že je aj pozitívne definitná.

Riešenie môžeme nájsť napr. Gaussovou eliminačnou metódou.

Okrajové úlohy - Metóda konečných diferencií (metóda sietí)

Príklad

Metódou konečných diferencií riešte okrajovú úlohu

$$-y'' + (1 + x^2) \cdot y = x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2,$$

s krokom $h = 0.25$.

Riešenie: Riešenie hľadáme v uzlových bodoch $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.50$, $x_3 = 0.75$, v krajných bodoch intervalu riešenie poznáme z okrajových úloh.

Výsledky pomocných výpočtov zaznamenáme do tabuľky

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\sigma_i = (1 + x_i^2)$		1.0625	1.25	1.5625	
$f_i = x_i$		0.25	0.50	0.75	

Sústava diskreditačných rovníc má tvar

$$\begin{aligned}2.0664 \cdot y_1 - y_2 &= 0.0156 + 1, \\ -y_1 + 2.0781 \cdot y_2 - y_3 &= 0.0313, \\ -y_2 + 2.0977 \cdot y_3 &= 0.0469 + 2.\end{aligned}$$

A jej riešením dostávame $y_1 \doteq 1.140$, $y_2 \doteq 1.341$, $y_3 \doteq 1.615$.

Pre porovnanie, presné hodnoty sú $y(x_1) \doteq 1.138$, $y(x_2) \doteq 1.337$, $y(x_3) \doteq 1.612$.

Základným princípom metódy strel'by je **prevedenie okrajovej úlohy**

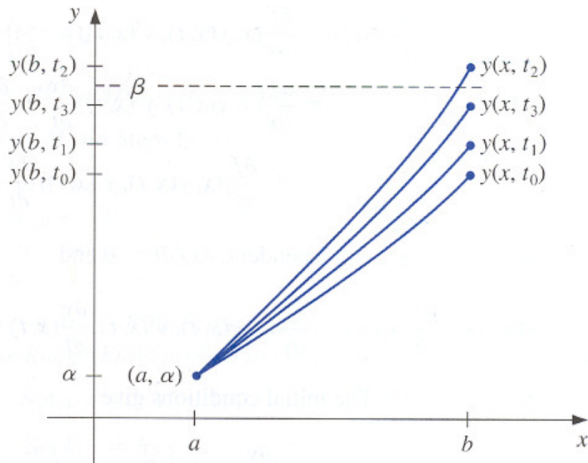
$$y'' = F(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta,$$

na počiatočnú úlohu druhého rádu, pri ktorej okrem počiatočnej hodnoty v bode $a = x_0$ musíme poznať aj jej prvú deriváciu v tomto bode (smernicu dotyčnice)

$$y'' = F(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t.$$

Ak by sme si túto hodnotu derivácie $y'(a) = t$ zvolili, mohli by sme niektorou z metód na riešenie počiatočnej úlohy nájsť približné riešenie tejto diferenciálnej rovnice druhého rádu, avšak zrejme by sme „netrafili“ požadovanú druhú okrajovú úlohu $y(b) = \beta$. Korekciou by sme mohli nájsť riešenie, ktoré sa pôvodnému priblíži viac a tak ďalej, až kým by sme nedosiahli požadovanú presnosť.

Okrajové úlohy - Metóda strel'by



V podstate ide o riešenie rovnice

$$y(b, t) = \beta, \quad \text{resp. } y(b, t) - \beta = 0,$$

čo je nelineárna rovnica neznámeho parametra t , ktorú môžeme riešiť napr. metódou sečníc a iteračná postupnosť má potom tvar

$$t_k = t_{k-1} - (y(b, t_{k-1}) - \beta) \frac{t_{k-1} - t_{k-2}}{y(b, t_{k-1}) - y(b, t_{k-2})},$$

kde $k = 2, 3, \dots$