

Interpolácia funkcie & aproximácia funkcie metódou najmenších štvorcov

Pavol ORŠANSKÝ

22. novembra 2023

Hlavnou ideou interpolácie je nájsť funkciu (v našom prípade polynóm) $P_n(x)$, ktorá/ý sa bude zhodovať s funkciou $f(x)$ v $n + 1$ rôznych **uzlových bodoch** x_i , t. j. bude platiť

$$P_n(x) = f(x_i) = f_i = y_i \quad \text{pre } i = 0, 1, \dots, n.$$

Niekedy sa navyše vyžaduje aj rovnosť derivácií do istého rádu, napr. pri tzv. *Hermitovej aproximácii* sa vyžaduje zhoda prvých derivácií v uzlových bodoch.

Veta (Interpoláčn  veta)

Pre ka d  $(n + 1)$ -ticu funkčných hodnôt $y_0, y_1, \dots, y_n$ a $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$, existuje práve jeden algebraick  polynóm n -tého stupňa

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \tag{1}$$

tak , že pre  platí (teda, že týmito bodmi prechádza)

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{2}$$

Dôkaz.

Priamym dosadením do (2) dostávame sústavu $(n + 1)$ rovníc o $(n + 1)$ neznámych

$$y_0 = P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n,$$

$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n,$$

...

$$y_n = P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n,$$

ktorej riešením sú koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ polynómu (1). Táto má riešenie vždy, nakoľko determinant tzv. **Vandermontovej matice** je vždy nenulový

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Lagrangeova interpolácia

Lagrangeov interpolačný polynóm $L_n(x)$ zostrojíme lineárnou kombináciou funkčných hodnôt y_i a tzv. *elementárnych Lagrangeových interpolačných polynómov* $l_{n,i}(x)$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_{n,i}(x),$$

kde elementárne Lagrangeové interpolačné polynómy sú

$$l_{n,i}(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)},$$

a teda sú vo všetkých uzlových bodoch, okrem i -tého, rovné nule t. j. platí

$$l_{n,i}(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Príklad (1.a)

Nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Nultý elementárny Lagrangeov interpolačný polynóm je

$$\begin{aligned}l_{4,0}(x) &= \frac{(x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-4) \cdot (x-6)}{(-2-0) \cdot (-2-2) \cdot (-2-4) \cdot (-2-6)} \\&= \frac{1}{384} x (x-2) (x-4) (x-6) \\&= \frac{1}{384} x^4 - \frac{1}{32} x^3 + \frac{11}{96} x^2 - \frac{1}{8} x,\end{aligned}$$

Príklad (1.b)

Nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

prvý elementárny Lagrangeov interpolačný polynóm je

$$\begin{aligned}l_{4,1}(x) &= \frac{(x+2) \cdot (x-2) \cdot (x-4) \cdot (x-6)}{(0+2) \cdot (0-2) \cdot (0-4) \cdot (0-6)} \\&= -\frac{1}{96} (x-2)(x+2)(x-4)(x-6) \\&= \frac{5}{48}x^3 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{5}{24}x^2 - \frac{5}{12}x + 1,\end{aligned}$$

Príklad (1.c)

Nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

druhý elementárny Lagrangeov interpolačný polynóm je

$$\begin{aligned}l_{4,2}(x) &= \frac{(x+2) \cdot (x-0) \cdot (x-4) \cdot (x-6)}{(2+2) \cdot (2-0) \cdot (2-4) \cdot (2-6)} \\&= \frac{1}{64}x(x+2)(x-4)(x-6) \\&= \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{4}x\end{aligned}$$

Príklad (1.d)

Nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

tretí elementárny Lagrangeov interpolačný polynóm je

$$\begin{aligned}l_{4,3}(x) &= \frac{(x+2) \cdot (x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-6)}{(4+2) \cdot (4-0) \cdot (4-2) \cdot (4-6)} \\&= -\frac{1}{96}x(x-2)(x+2)(x-6) \\&= \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{4}x,\end{aligned}$$

Príklad (1.e)

Nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

štvrtý elementárny Lagrangeov interpolačný polynóm je

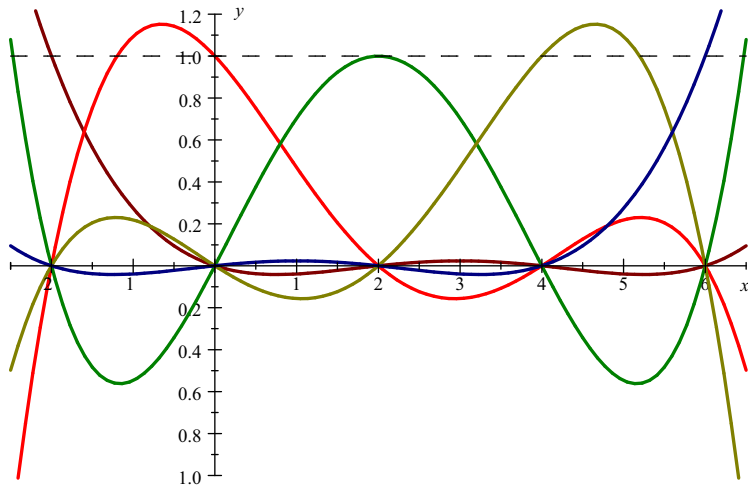
$$\begin{aligned}l_{4,4}(x) &= \frac{(x+2) \cdot (x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-4)}{(6+2) \cdot (6-0) \cdot (6-2) \cdot (6-4)} \\&= \frac{1}{384} x (x-2) (x+2) (x-4) \\&= \frac{1}{384} x^4 - \frac{1}{96} x^3 - \frac{1}{96} x^2 + \frac{1}{24} x.\end{aligned}$$

Príklad (1.f)

Celkovo Lagrangeov interpolačný polynóm $L_4(x)$ získame prenásobením elementárnych Lagrangeových polynómov $l_{4,i}(x)$ funkčnými hodnotami $y_i = f(x_i)$, čiže

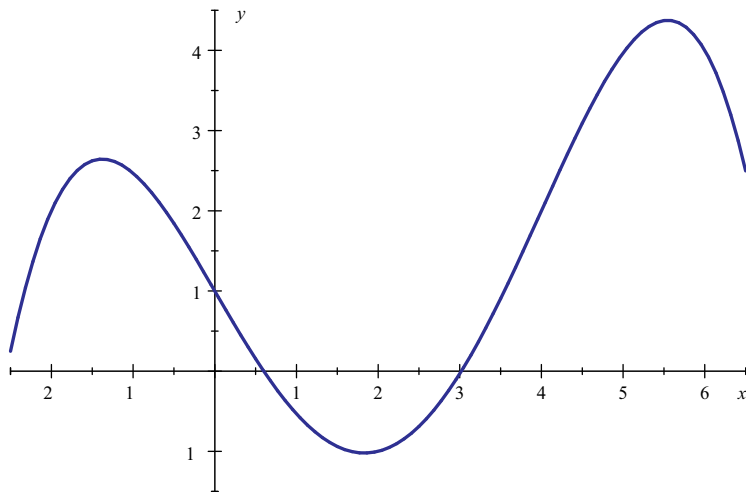
$$\begin{aligned} L_4(x) &= 2 \cdot \frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-6)}{384} + 1 \cdot \frac{(x+2)(x-2)(x-4)(x-6)}{-96} \\ &\quad + (-1) \cdot \frac{(x+2)x(x-4)(x-6)}{64} + 2 \cdot \frac{(x+2)x(x-2)(x-6)}{-96} \\ &\quad + 4 \cdot \frac{(x+2)x(x-2)(x-4)}{384} \\ &= -\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x + 1. \end{aligned}$$

Lagrangeova interpolácia



Obr.: elementárne Lagrangeove polynómy $l_{4,i}(x)$.

Lagrangeova interpolácia



Obr.: Lagrangeove polynómy $L_4(x) = -\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x + 1$

Ďalším interpolačným polynómom **Newtonov interpolačný polynóm**.

Pomocou Newtonovej interpolácie nájdeme opäť ten istý polynóm ako Lagrangeovou interpoláciou, čo je zrejmé, nakoľko, ako hovorí predošlá Interpolačná veta, tento polynóm je jediný.

Rozdielny je ale spôsob jeho odvodu. Newtonova metóda nevytvára celý polynóm naraz, ale postupne zahrňa viacej bodov do interpolácie a tak konštruuje polynómy vyššieho stupňa.

Newtonova interpolácia

Najskôr zavedieme pojem **pomernej diferencie**.

Pomerná diferencia prvého rádu je definovaná vzťahom

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Čo je akýsi odhad prvej derivácie pomocou jej funkčných hodnôt. Obdobne definujeme aj jej **druhú pomernú diferenciu**, pomocou pomerných diferencií nižšieho rádu

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}.$$

A všeobecne aj jej **n -tú pomernú diferenciu** pomocou pomerných diferencií $n - 1$ rádu

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}.$$

Newtonova interpolácia

Newtonova metóda začína s konštantnou interpoláciou jedným bodom

$$N_0(x) = f(x_0).$$

Pridaním ďalšieho bodu dostávame lineárnu interpoláciu

$$N_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_1, x_0].$$

Ak by sme pridali ďalší bod dostávame kvadratickú interpoláciu, a pre ďalší bod obdobne

$$N_2(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_2, x_1, x_0],$$

etc. až po n -tú interpoláciu

$$\begin{aligned} N_n(x) = & f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_2, x_1, x_0] \\ & + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]. \end{aligned}$$

Výhodou **Newtonovho interpolačného polynómu** je, že pridávaním ďalších členov môžeme zvyšovať presnosť interpolácie, pričom body x_i ani nemusia byť zoradené.

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$			
1	0	1				
2	2	-1				
3	4	2				
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$			
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$			
2	2	-1				
3	4	2				
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$			
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$			
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$			
3	4	2				
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$			
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$			
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$			
3	4	2	$\frac{4-2}{6-4} = 1$			
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-(-\frac{1}{2})}{2-(-2)} = -\frac{1}{8}$		
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$			
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$			
3	4	2	$\frac{4-2}{6-4} = 1$			
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-(-\frac{1}{2})}{2-(-2)} = -\frac{1}{8}$		
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	$\frac{\frac{3}{2}-(-1)}{4-0} = \frac{5}{8}$		
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$			
3	4	2	$\frac{4-2}{6-4} = 1$			
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-(-\frac{1}{2})}{2-(-2)} = -\frac{1}{8}$		
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	$\frac{\frac{3}{2}-(-1)}{4-0} = \frac{5}{8}$		
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1-\frac{3}{2}}{6-2} = -\frac{1}{8}$		
3	4	2	$\frac{4-2}{6-4} = 1$			
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-(-\frac{1}{2})}{2-(-2)} = -\frac{1}{8}$	$\frac{\frac{5}{8}-(-\frac{1}{8})}{4-(-2)} = \frac{1}{8}$	
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	$\frac{\frac{3}{2}-(-1)}{4-0} = \frac{5}{8}$		
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1-\frac{3}{2}}{6-2} = -\frac{1}{8}$		
3	4	2	$\frac{4-2}{6-4} = 1$			
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-(-\frac{1}{2})}{2-(-2)} = -\frac{1}{8}$	$\frac{\frac{5}{8}-(-\frac{1}{8})}{4-(-2)} = \frac{1}{8}$	
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	$\frac{\frac{3}{2}-(-1)}{4-0} = \frac{5}{8}$	$\frac{-\frac{1}{8}-\frac{5}{8}}{6-0} = -\frac{1}{8}$	
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1-\frac{3}{2}}{6-2} = -\frac{1}{8}$		
3	4	2	$\frac{4-2}{6-4} = 1$			
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-(-\frac{1}{2})}{2-(-2)} = -\frac{1}{8}$	$\frac{\frac{5}{8}-(-\frac{1}{8})}{4-(-2)} = \frac{1}{8}$	$\frac{-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}}{6-(-2)} = -\frac{1}{32}$
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	$\frac{\frac{3}{2}-(-1)}{4-0} = \frac{5}{8}$	$\frac{-\frac{1}{8}-\frac{5}{8}}{6-0} = -\frac{1}{8}$	
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1-\frac{3}{2}}{6-2} = -\frac{1}{8}$		
3	4	2	$\frac{4-2}{6-4} = 1$			
4	6	4				

Newtonova interpolácia

Príklad (2.a)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie dané tabuľkou:

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Riešenie budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

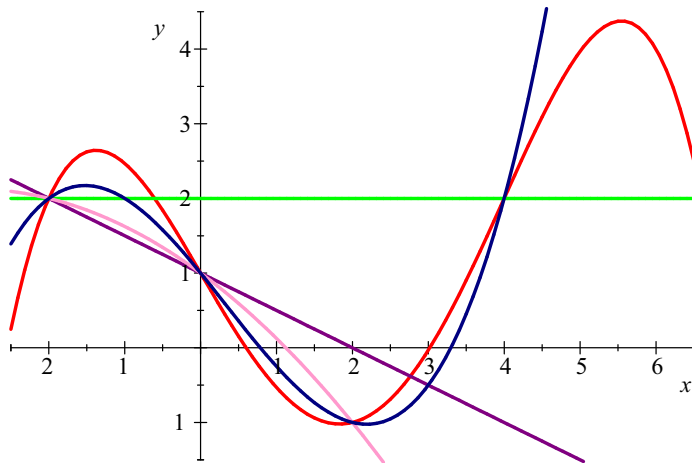
i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-(-\frac{1}{2})}{2-(-2)} = -\frac{1}{8}$	$\frac{\frac{5}{8}-(-\frac{1}{8})}{4-(-2)} = \frac{1}{8}$	$\frac{-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}}{6-(-2)} = -\frac{1}{32}$
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	$\frac{\frac{3}{2}-(-1)}{4-0} = \frac{5}{8}$	$\frac{-\frac{1}{8}-\frac{5}{8}}{6-0} = -\frac{1}{8}$	
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1-\frac{3}{2}}{6-2} = -\frac{1}{8}$		
3	4	2	$\frac{4-2}{6-4} = 1$			
4	6	4				

Príklad (2.b)

Hodnoty prvých pomerných diferencií príslušných rádov použijeme na určenie Newtonovho interpolačného polynómu

$$\begin{aligned}N_4(x) &= 2 + (x + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (x + 2)(x - 0) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \\&\quad + (x + 2)(x - 0)(x - 2) \cdot \frac{1}{8} \\&\quad + (x + 2)(x - 0)(x - 2)(x - 4) \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) \\&= -\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x + 1.\end{aligned}$$

Newtonova interpolácia



Obr.: Postupné pridávanie jednotlivých sčítancov Newtonovho interpolačného polynómu

Poznámka

Predošlé príklady mali uzlové body rozmiestnené v rovnakých vzdialenostiach, tzn. ekvidištantne. Nebolo to požiadavkou, t. j. oba polynómy nevyžadujú aby boli uzlové body takto rozmiestnené.

Ak sú však uzlové body rozmiestnené ekvidištantne, t. j. platí

$$x_{i+1} - x_i = h = \text{const.},$$

môžeme Newtonov interpolačný polynóm modifikovať, a to nasledujúcim spôsobom.

Newtonova interpolácia pre ekvidistantné uzly

Namiesto pomernej diferencie budeme požívať jednoduchú diferenciu.

Diferencia prvého rádu bude

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$$

a diferencia vyššieho rádu je

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x + h) - \Delta^{k-1} f(x),$$

kde $h = x_{i+1} - x_i$ je zrejme „krok“, t. j. vzdialenosť medzi jednotlivými uzlami.

Skrátene píšeme

$$\Delta f_i = f(x_i + h) - f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i,$$

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k+1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i.$$

Newtonova interpolácia pre ekvidištantné uzly

Diferencie môžeme teraz zrejme vyjadriť ako

$$f[x_{i+1}, x_i] = \frac{\Delta f_i}{h}.$$

Diferencia druhého rádu je zrejme

$$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i] = \frac{\frac{\Delta f_{i+1}}{h} - \frac{\Delta f_i}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2}.$$

Matematickou indukciou dostávame vzťah pre diferenciu k -tého rádu

$$f[x_{i+k}, \dots, x_i] = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k}.$$

Newtonov interpolačný polynóm pre ekvidištantné uzly má teda tvar

$$\begin{aligned} N_n(x) = & f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta f_i}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2} + \dots \\ & \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k}. \end{aligned}$$

Pre použitie interpolačných polynómov je dôležité poznať aspoň mieru chyby, ktorej sme sa pri interpolácii dopustili, preto je opodstatnené si túto chybu nejakým spôsobom vymedziť.

Veta (Chyba interpolačného polynómu)

Nech interval I je interval obsahujúci všetky uzlové body x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, určujúce interpolačný polynóm $P_n(x)$ a nech funkcia $f(x)$ je $(n+1)$ -krát diferencovateľná na tomto intervale.

Potom pre ľubovoľné $x \in I$ existuje také $\xi \in I$, že pre chybu interpolácie platí

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (3)$$

Poznámka

Použitie predošlého odhadu je v praxi dosť náročné, keďže hodnota ξ je pre každý bod x z intervalu I iná. Preto chybu ohraničíme aspoň zhora.

Veta (Horné ohraničenie chyby interpolačného polynómu)

Označme $M_{n+1} = \max_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$, potom pre horné ohraničenie chyby platí

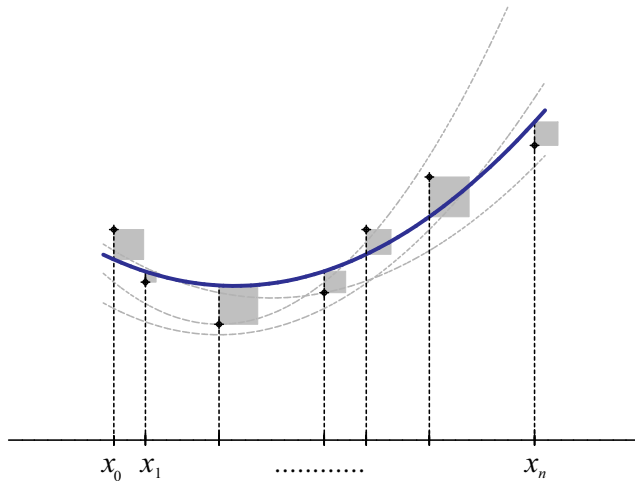
$$|\varepsilon(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Aproximáciou funkcie budeme mať na mysli nahradenie funkcie inou funkciou, ktorej „vzdialenosť“ od pôvodnej funkcie je minimálna.

Abstraktnosť pojmu „minimálna vzdialenosť dvoch funkcií“ nahradíme požiadavkou, aby odchýlky od pôvodnej funkcie boli celkovo (!) minimálne. V istom zmysle môžeme hovoriť aj o akomsi „priblížení“.

Vo všeobecnej praxi často ani nie je nutné, aby nami hľadaná krivka prechádzala všetkými bodmi pôvodnej funkcie, nakoľko sa často jedná o hodnoty funkcie poznačené či už chybou merania, alebo inak znehodnotené, a teda hľadaná krivka má do istej miery iba vystihovať charakter hodnôt (funkcie).

Aproximácia metódou najmenších štvorcov



Obr.: Vizualizácia aproximácie metódou najmenších štvorcov.

Máme dané dvojice bodov (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$. Hľadáme teda polynóm m -tého stupňa tvaru

$$p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m = \sum_{j=0}^m a_jx^j.$$

Poznámka

Tu by sme sa chceli pozastaviť a zdôrazniť, že stupeň polynómu m je väčšinou podstatne menší ako počet bodov n (t. j. $m \ll n$), ktorými tento polynóm prekladáme. Ak by bol počet bodov rovnaký ako stupeň polynómu išlo by zrejme o interpoláciu, t. j. tvoma bodmi preložím a „najlepšie“ polynóm druhého stupňa (parabolou) tak, že bude týmito bodmi prechádzať.

Aproximácia metódou najmenších štvorcov - polynomická

Požadujeme, aby suma odchýlok nášho polynómu od daných hodnôt (danej funkcie) bola minimálna, t. j.

$$E = \sum_{i=0}^n \epsilon_i = \sum_{i=0}^n |p_m(x_i) - y_i| \rightarrow \min .$$

Nakoľko absolútnu hodnotu nevieme derivovať nahradíme ju druhou mocninou rozdielu, ktorá má veľmi podobné vlastnosti (t. j., je kladná a definuje mieru rozdielu hodnôt)

$$E = \sum_{i=0}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n (p_m(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min .$$

Dosadíme nami hľadaný polynóm, t. j. $p_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$

$$E = \sum_{i=0}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left(a_j x_i^j - y_i \right)^2 .$$

Táto suma je funkciou koeficientov hľadaného polynómu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$.

Aproximácia metódou najmenších štvorcov - polynomická

Minimálna bude táto suma v prípade, že bude prvá derivácia rovná nule

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}_k}.$$

Upravíme

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}_k} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_k} \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left(\mathbf{a}_j x_i^j - y_i \right)^2 \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_k} \left(\mathbf{a}_j x_i^j - y_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m 2 \left(\mathbf{a}_j x_i^j - y_i \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_k} \left(\mathbf{a}_j x_i^j - y_i \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m 2 \left(\mathbf{a}_j x_i^j - y_i \right) \cdot x_i^k \\ &= 2 \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \left(\mathbf{a}_j x_i^{j+k} - y_i x_i^k \right) = 2 \left(\sum_{j=0}^m \mathbf{a}_j \sum_{i=0}^n x_i^{j+k} - \sum_{i=0}^n y_i x_i^k \right) = 0\end{aligned}$$

Aproximácia metódou najmenších štvorcov - polynomická

a dostávame sústavu

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=0}^n x_i^0 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^1 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^m &= \sum_{i=0}^n y_i x_i^0, \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^1 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^n y_i x_i^1, \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} &= \sum_{i=0}^n y_i x_i^2, \\ &\vdots \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+m} &= \sum_{i=0}^n y_i x_i^m, \end{aligned}$$

kde zrejme $\sum_{i=0}^n x_i^0 = \sum_{i=0}^n 1 = n + 1$.

Aproximácia metódou najmenších štvorcov - polynomická

Označíme

$$S_k = \sum_{i=0}^n x_i^k, \quad T_k = \sum_{i=0}^n y_i x_i^k,$$

a dostávame

$$\sum_{j=0}^m a_j \cdot S_{j+k} - T_k = 0.$$

Čo je systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} S_0 \cdot a_0 + S_1 \cdot a_1 + \dots + S_m \cdot a_m &= T_0, \\ S_1 \cdot a_0 + S_2 \cdot a_1 + \dots + S_{m+1} \cdot a_m &= T_1, \\ &\dots \\ S_m \cdot a_0 + S_{m+1} \cdot a_1 + \dots + S_{2m} \cdot a_m &= T_m. \end{aligned}$$

Maticovo môžeme tento systém zapísať v tvare

$$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_m \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_m & S_{m+1} & \cdots & S_{2m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix}.$$

Riešením tohto systému lineárnych rovníc získame koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ polynómu, ktorým „prekladáme“ dané hodnoty.

Dôsledok (Polynomická aproximácia priamkou)

Pre polynóm 1. stupňa (priamka) má systém nasledujúci tvar

$$\begin{aligned}a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i &= \sum_{i=0}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n y_i x_i.\end{aligned}$$

Propozícia (Polynomická aproximácia priamkou)

Pomocou Cramerovho pravidla dostávame

$$a_0 = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \sum_{i=0}^n x_i^2 - \sum_{i=0}^n x_i \sum_{i=0}^n x_i y_i}{(n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2} = \frac{T_0 \cdot S_2 - S_2 \cdot T_1}{(n+1) \cdot S_2 - (S_1)^2},$$
$$a_1 = \frac{(n+1) \sum_{i=0}^n x_i y_i - \sum_{i=0}^n x_i \sum_{i=0}^n y_i}{(n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2} = \frac{(n+1) \cdot T_1 - S_1 \cdot T_0}{(n+1) \cdot S_2 - (S_1)^2}.$$

Propozícia (Polynomická aproximácia parabolou)

Pre polynóm 2. stupňa (parabola) má systém nasledujúci tvar

$$\begin{aligned}a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n y_i, \\a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 &= \sum_{i=0}^n y_i x_i, \\a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 &= \sum_{i=0}^n y_i x_i^2.\end{aligned}$$

Poznámka

Je dôležité si uvedomiť, že aj keď sme uvažovali o minimálnej odchýlke nájdeného polynómu (lineárneho alebo kvadratického) od daných bodov, nemusí tento polynóm skutočne vystihovať reálny charakter daných funkčných bodov najlepšie, keďže nejaká časť variabilty týchto hodnôt môže pripadať na inú ako lineárnu, resp. kvadratickú závislosť (vid'. korelačná analýza).

Príklad

Preložme bodmi $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$ a $(6, 5)$ parabolu.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
0	1	0	1	1	1	0	0
1	2	0	4	8	16	0	0
2	3	4	9	27	81	12	36
3	4	5	16	64	256	20	80
4	5	4	25	125	625	20	100
5	6	5	36	216	1296	30	180
Σ	21	18	91	441	2275	82	396

To znamená, že riešime sústavu

$$\begin{aligned}6a_0 + 21a_1 + 91a_2 &= 18, \\21a_0 + 91a_1 + 441a_2 &= 82, \\91a_0 + 441a_1 + 2275a_2 &= 396.\end{aligned}$$

V maticovom zápise

$$\begin{pmatrix} 6 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 82 \\ 396 \end{pmatrix}.$$

Aproximácia metódou najmenších štvorcov - polynomická

Sústavu riešime napríklad Cramerovým pravidlom

$$D = \det \begin{pmatrix} 6 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{pmatrix} = 3920,$$

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 18 & 21 & 91 \\ 82 & 91 & 441 \\ 396 & 441 & 2275 \end{pmatrix} = -12\,936,$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & 18 & 91 \\ 21 & 82 & 441 \\ 91 & 396 & 2275 \end{pmatrix} = 11\,606,$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 6 & 21 & 18 \\ 21 & 91 & 82 \\ 91 & 441 & 396 \end{pmatrix} = -1050,$$

a teda

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{D_1}{D} = \frac{-12\,936}{3920} = -3.3, \\a_1 &= \frac{D_2}{D} = \frac{11\,606}{3920} = 2.960\,7, \\a_2 &= \frac{D_3}{D} = \frac{-1050}{3920} = -0.267\,86.\end{aligned}$$

Hľadaný polynóm má tvar

$$p_2(x) = -3.30000 + 2.9607 \cdot x - 0.26786 \cdot x^2.$$

Exponencionálnu funkciu

$$y = A \cdot e^{Bx}$$

zlogaritmujeme

$$\ln y = \ln A + Bx \cdot \ln e = \ln A + Bx$$

a za použitia označenia $a = \ln A$, $b = B$ dostávame lineárnu aproximáciu

$$\ln y = a + B \cdot x$$

ktorú by sme aproximovali ako v predchádzajúcom prípade

parametre podľa Cramerovho pravidla pre sústavu 2x2 sú

$$a = \frac{\sum_{i=0}^n \ln y_i \sum_{i=0}^n x_i^2 - \sum_{i=0}^n x_i \sum_{i=0}^n x_i \ln y_i}{(n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2},$$
$$b = \frac{(n+1) \sum_{i=0}^n x_i \ln y_i - \sum_{i=0}^n x_i \sum_{i=0}^n \ln y_i}{(n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2},$$

a následne $B = b$ a $A = \exp(a) = e^a$.

Tento odhad dáva veľmi dobré výsledky najmä pre väčšie hodnoty $y \gg 0$.

Niekedy je lepšie minimalizovať

$$\sum_{i=0}^n y_i (\ln y_i - a - bx_i)^2 \rightarrow \min,$$

čiže

$$\begin{aligned} a \sum_{i=0}^n y_i + b \sum_{i=0}^n x_i y_i &= \sum_{i=0}^n y_i \ln y_i, \\ a \sum_{i=0}^n x_i y_i + b \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i &= \sum_{i=0}^n x_i y_i \ln y_i, \end{aligned}$$

Aproximácia metódou najmenších štvorcov - exponenciálna 2

$$a = \frac{\sum_{i=0}^n (x_i^2 y_i) \sum_{i=0}^n y_i \ln y_i - \sum_{i=0}^n x_i y_i \sum_{i=0}^n x_i y_i \ln y_i}{\sum_{i=0}^n y_i \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i - \left(\sum_{i=0}^n x_i y_i \right)^2},$$
$$b = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \sum_{i=0}^n x_i y_i \ln y_i - \sum_{i=0}^n x_i y_i \sum_{i=0}^n y_i \ln y_i}{\sum_{i=0}^n y_i \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i - \left(\sum_{i=0}^n x_i y_i \right)^2}.$$

kde $B = b$ a $A = \exp(a) = e^a$.

Aproximácia metódou najmenších štvorcov - logaritmická

Pre **logaritmickú funkciu**

$$y = a + b \ln x,$$

budú koeficienty aproximácie určené analogicky predošlým postupom a budú viesť na sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorá použitím Cramarovho pravidla určuje tieto nasledujúcim spôsobom

$$b = \frac{(n+1) \sum_{i=0}^n (y_i \ln x_i) - \sum_{i=0}^n y_i \sum_{i=0}^n \ln x_i}{(n+1) \sum_{i=0}^n (\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^n \ln x_i \right)^2},$$
$$a = \frac{\sum_{i=0}^n y_i - b \sum_{i=0}^n \ln x_i}{(n+1)}.$$

Mocninovú funkciu

$$y = A \cdot x^B,$$

aproximujeme použitím následných odhadov pre parametre

$$b = \frac{(n+1) \sum_{i=0}^n \ln x_i \ln y_i - \sum_{i=0}^n \ln x_i \sum_{i=0}^n \ln y_i}{(n+1) \sum_{i=0}^n (\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^n \ln x_i \right)^2},$$
$$a = \frac{\sum_{i=0}^n \ln y_i - b \sum_{i=0}^n \ln x_i}{(n+1)},$$

kde $B = b$ a $A = \exp(a) = e^a$.