12 Numerické riešenie ODR - Cauchyho počiatočná úloha

Príklad 1 *Riešme Cauchyho počiatočnú úlohu*

$$y' = \frac{5x^2 - y}{e^{x+y}},$$

s počiatočnou podmienkou

$$y(0) = 1,$$

s krokom $h = 0.2$ *na intervale* $[0, 1]$*:*

a) *Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 1. rádu),*

b) *modifikovanou Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 2. rádu),*

c) *metódou Rungeho-Kutta 4. rádu.*

a) *Pre* $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.2$ *a* $F(x, y) = \frac{5x_i^2 - y_i}{e^{x_i + y_i}}$ *vypočítame podľa vzťahu*

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i) = y_i + 0.2 \cdot \frac{5x_i^2 - y_i}{e^{x_i + y_i}},$$

pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$. *Výsledky zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
y_i	1.0000	0.9264	0.8793	0.8749	0.9172	0.9992

```
h = 0.2;
x = 0:h:1;
F = @ (x,y) (5*x*x-y)/exp(x+y);
y(1)=1;
for i = 1:5
 y(i+1) = y(i) + h*F(x(i),y(i))
end
figure
plot(x,y,'b')
```

Príklad 2

b) *Použijeme prvú modifikovanú Eulerovu metódu*

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right), \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot k_2. \end{aligned}$$

pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$. *Výsledky zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
k_1	−0.3679	−0.2364	−0.0295	0.1899	0.3720	
k_2	−0.3154	−0.1377	0.0842	0.2904	0.4433	
y_i	1.0000	0.9369	0.9094	0.9262	0.9843	1.0730

```
h = 0.2;
x = 0:h:1;
F = @ (x,y) (5*x*x-y)/exp(x+y);
y(1)=1;
for i = 1:5
 k1 = F(x(i),y(i))
 k2 = F(x(i)+0.5*h,y(i)+0.5*h*k1)
 y(i+1) = y(i) + h*k2
end
figure
plot(x,y,'b')
```

a použitím druhej modifikovanej Eulerovej metódy

$$\begin{aligned} k_1 &= F\left(x_i, y_i\right), \\ k_2 &= F\left(x_i + h, y_i + h \cdot k_1\right), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2} h \cdot \left(k_1 + k_2\right). \end{aligned}$$

pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$. *Výsledky zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
k_1	−0.3679	−0.2366	−0.0305	0.1883	0.3705	
k_2	−0.2355	−0.0254	0.1977	0.3810	0.5014	
y_i	1.0000	0.9397	0.9135	0.9302	0.9871	1.0743

```
h = 0.2;
x = 0:h:1;
F = @ (x,y) (5*x*x-y)/exp(x+y);
y(1)=1;
for i = 1:5
 k1 = F(x(i),y(i))
 k2 = F(x(i)+h,y(i)+h*k1)
 y(i+1) = y(i) + 0.5*h*(k1+k2),
end
figure
plot(x,y,'b')
```

c) *Vzťah pre metódu Rungeho-Kutta 4. rádu je*

$$\begin{aligned} k_1 &= F\left(x_i, y_i\right), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right), \\ k_3 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_2\right), \\ k_4 &= F\left(x_i + h, y_i + h \cdot k_3\right), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h \cdot \left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \end{aligned}$$

pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$. *Výsledky zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
k_1	−0.3679	−0.2365	−0.0298	0.1897	0.3723	
k_2	−0.3154	−0.1378	0.0838	0.2902	0.4436	
k_3	−0.3155	−0.1394	0.0801	0.2853	0.4394	
k_4	−0.2364	−0.0297	0.1898	0.3723	0.4949	
y_i	1.0000	0.9378	0.9104	0.9267	0.9838	1.0716

```
h = 0.2;
x = 0:h:1;
F = @ (x,y) (5*x*x-y)/exp(x+y);
y(1)=1;
for i = 1:5
    k1 = F(x(i),y(i))
    k2 = F(x(i)+0.5*h,y(i)+0.5*h*k1)
    k3 = F(x(i)+0.5*h,y(i)+0.5*h*k2)
    k4 = F(x(i)+h,y(i)+h*k3)
    y(i+1) = y(i) + (h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)
end
figure
plot(x,y,'b')
```

Príklad 3 *Metódou Rungeho-Kutta 4. rádu riešme sústavu*

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x - 2\mathrm{e}^t + 1, \\ z' &= -x - \mathrm{e}^t + 1, \end{aligned}$$

s krokom $h = 0.1$ *na intervale* $t \in [0, 1]$ *s počiatočnými podmienkami*

$$\begin{aligned} x(0) &= 1, \\ y(0) &= 0, \\ z(0) &= 1. \end{aligned}$$

Zrejme máme

$$
\begin{aligned}
F_1(t,x,y,z) &= y,\\
F_2(t,x,y,z) &= -x-2\mathrm{e}^t+1,\\
F_3(t,x,y,z) &= -x-\mathrm{e}^t+1,
\end{aligned}
$$

a teda pre približné riešenie metódy Rungeho-Kutta 4. rádu bude platiť

$$
\begin{aligned}
k_1 &= F_1(t_i,x_i,y_i,z_i) = y_i,\\
l_1 &= F_2(t_i,x_i,y_i,z_i) = -x_i-2\mathrm{e}^{t_i}+1,\\
m_1 &= F_3(t_i,x_i,y_i,z_i) = -x_i-\mathrm{e}^{t_i}+1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= F_1\left(t_i+\frac{h}{2},x_i+\frac{h}{2}k_1,y_i+\frac{h}{2}l_1,z_i+\frac{h}{2}m_1\right),\\
l_2 &= F_2\left(t_i+\frac{h}{2},x_i+\frac{h}{2}k_1,y_i+\frac{h}{2}l_1,z_i+\frac{h}{2}m_1\right),\\
m_2 &= F_3\left(t_i+\frac{h}{2},x_i+\frac{h}{2}k_1,y_i+\frac{h}{2}l_1,z_i+\frac{h}{2}m_1\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3 &= F_1\left(t_i+\frac{h}{2},x_i+\frac{h}{2}k_2,y_i+\frac{h}{2}l_2,z_i+\frac{h}{2}m_2\right),\\
l_3 &= F_2\left(t_i+\frac{h}{2},x_i+\frac{h}{2}k_2,y_i+\frac{h}{2}l_2,z_i+\frac{h}{2}m_2\right),\\
m_3 &= F_3\left(t_i+\frac{h}{2},x_i+\frac{h}{2}k_2,y_i+\frac{h}{2}l_2,z_i+\frac{h}{2}m_2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= F_1(t_i+h,x_i+h\cdot k_3,y_i+h\cdot l_3,z_i+h\cdot m_3),\\
l_4 &= F_2(t_i+h,x_i+h\cdot k_3,y_i+h\cdot l_3,z_i+h\cdot m_3),\\
m_4 &= F_3(t_i+h,x_i+h\cdot k_3,y_i+h\cdot l_3,z_i+h\cdot m_3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i+\frac{1}{6}h\cdot(k_1+2k_2+2k_3+k_4),\\
y_{i+1} &= y_i+\frac{1}{6}h\cdot(l_1+2l_2+2l_3+l_4),\\
z_{i+1} &= z_i+\frac{1}{6}h\cdot(m_1+2m_2+2m_3+m_4).
\end{aligned}
$$

Riešenie zapíšeme do tabuľky

t	x_i	y_i	z_i
0.0000	1.0000	0.0000	1.0000
0.1000	0.9897	−0.2100	0.8952
0.2000	0.9573	−0.4400	0.7814
0.3000	0.9010	−0.6900	0.6598
0.4000	0.8187	−0.9602	0.5316
0.5000	0.7083	−1.2506	0.3982
0.6000	0.5679	−1.5614	0.2607
0.7000	0.3953	−1.8931	0.1206
0.8000	0.1885	−2.2462	−0.0206
0.9000	−0.0547	−2.6213	−0.1617
1.0000	−0.3365	−3.0194	−0.3012

```
F = @ (t,x) [x(2);-x(1)-2*exp(t)+1;-x(1)-exp(t)+1];
x=[1;0;1];t=[0:0.1:1]'
for i=1:1:10
 k1=F(t(i),x)
 k2=F(t(i)+0.5*0.1,x+0.5*0.1*k1)
 k3=F(t(i)+0.5*0.1,x+0.5*0.1*k2)
 k4=F(t(i)+0.1,x+0.1*k3)
 x=x+0.1*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
end
```

Alebo s vzkreslením

```
F = @ (t,x) [x(2);-x(1)-2*exp(t)+1;-x(1)-exp(t)+1];x=[1;0;1];t=0:0.1:1;
for i=1:1:10
k1=F(t(i),x(:,i))
k2=F(t(i)+0.5*0.1,x(:,i)+0.5*0.1*k1)
k3=F(t(i)+0.5*0.1,x(:,i)+0.5*0.1*k2)
k4=F(t(i)+0.1,x(:,i)+0.1*k3)
x(:,i+1)=x(:,i)+0.1*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
end
plot(t,x(1,:),'r',t,x(2,:),'g',t,x(3,:),'b')
```

Príklad 4 *Riešme Cauchyho počiatočnú úlohu určenú diferenciálnou rovnicou*

$$y' + 2y = x^3 \mathrm{e}^{-2x},$$

s počiatočnou podmienkou

$$y(0) = 1,$$

s krokom $h = 0.2$ na intervale $[0, 1]$:

a) *Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 1. rádu),*

b) *modifikovanou Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 2. rádu),*

c) *metódou Rungeho-Kutta 4. rádu.*

a) *Určujúcou funkciou pre zadanú Cauchyho počiatočnú úlohu je zrejme*

$$y' = F(x, y) = -2y + x^3 \mathrm{e}^{-2x}.$$

Vzťah pre Eulerovu metódu je

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i) = y_i + 0.2 \cdot \left(-2y_i + x_i^3 \mathrm{e}^{-2x_i}\right),$$

a pre sieť uzlových bodov $x_i = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$ *vypočítané odhady riešenia zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1.0000	0.6000	0.3611	0.2224	0.1464	0.1085

b) *Prvá modifikovaná Eulerova metóda je určená vzťahom*

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right), \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot k_2 \end{aligned}$$

a priebežné ako aj celkové výsledky opäť zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
k_1	-2	-1.3550	-0.9018	-0.5838	-0.3665	
k_2	1.5992	-1.0745	-0.7042	-0.4475	-0.2760	
y_i	1.0000	0.6802	0.4653	0.3244	0.2349	0.1797

a druhá modifikovaná Eulerova metóda je určená vzťahom

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_1), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}h \cdot (k_1 + k_2) \end{aligned}$$

a opäť výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
k_1	-2.0000	-1.3557	-0.9032	-0.5851	-0.3672	
k_2	-1.1946	-0.7900	-0.5056	-0.3128	-0.1884	
y_i	1.0000	0.6805	0.4660	0.3251	0.2353	0.1797

c) *Metóda Rungeho-Kutta 4. rádu*

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right) \\ k_3 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_2\right) \\ k_4 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

výsledky sú v tabuľke

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
k_1	−2.0000	−1.3360	−0.8759	−0.5571	−0.3420	
k_2	−1.5992	−1.0593	−0.6835	−0.4261	−0.2564	
k_3	−1.6793	−1.1147	−0.7219	−0.4523	−0.2735	
k_4	−1.3229	−0.8667	−0.5508	−0.3378	−0.2006	
y_i	1.0000	0.6707	0.4523	0.3111	0.2227	0.1693

Príklad 5 *Metódou Rungeho-Kutta 1.rádu riešme*

$$y'' = \left(1 - y^2\right) \cdot y' - y,$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y(0) &= 2, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned}$$

s krokom $h = 0.1$ *na intervale* $[0, 0.5]$.

Diferenciálnu rovnicu druhého rádu si transformujeme na sústavu dvoch diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= \left(1 - y_1^2\right) \cdot y_2 - y_1, \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 2, \\ y_2(0) &= 0, \end{aligned}$$

a pre funkcie

$$\begin{aligned} F_1(x, y_1, y_2) &= y_2, \\ F_2(x, y_1, y_2) &= \left(1 - y_1^2\right) \cdot y_2 - y_1, \end{aligned}$$

dostávame výsledky, ktoré zapíšeme do tabulky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_{1_i}	2.0000	2.0000	1.9800	1.9460	1.9021	1.8510
y_{2_i}	0.0000	−0.2000	−0.3400	−0.4387	−0.5110	−0.5675

```
F = @ (x,y) [y(2);(1-y(1)*y(1))*y(2)-y(1)];
y=[2;0];
x=0:0.1:0.5
for i=1:1:5
 y=y+0.1*F(x(i),y)
end
```

Ak by sme predošlý príklad riešili metódou Runge-Kutta 4. rádu, dostávame

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
k_{1_1}	0.0000	−0.1726	−0.3007	−0.3974	−0.4728	
k_{2_1}	−0.1000	−0.2466	−0.3559	−0.4397	−0.5066	
k_{3_1}	−0.0850	−0.2356	−0.3483	−0.4346	−0.5033	
k_{4_1}	−0.1742	−0.3018	−0.3981	−0.4733	−0.5348	
k_{1_2}	−2.0000	−1.4793	−1.1043	−0.8462	−0.6753	
k_{2_2}	−1.7000	−1.2599	−0.9518	−0.7443	−0.6100	
k_{3_2}	−1.7417	−1.2918	−0.9742	−0.7593	−0.6195	
k_{4_2}	−1.4749	−1.1010	−0.8440	−0.6739	−0.5663	
y_{1_i}	2.0000	1.9909	1.9669	1.9318	1.8882	1.8377
y_{2_i}	0.0000	−0.1726	−0.3007	−0.3974	−0.4728	−0.5345

```
h = 0.1;x = 0:h:0.5;y = [2;0];
F = @ (x,y) [y(2);(1-y(1)*y(1))*y(2)-y(1)];
A = [x(1);0;0;0;0;0;0;0;0;y(1,1);y(2,1)];
for i=1:5
    k1 = F(x(i),y(:,i));
    k2 = F(x(i)+0.5*h,y(:,i)+0.5*h*k1);
    k3 = F(x(i)+0.5*h,y(:,i)+0.5*h*k2);
    k4 = F(x(i)+h,y(:,i)+h*k3);
    y(:,i+1) = y(:,i)+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    A(:,i+1) = [x(i);k1(1);k2(1);k3(1);k4(1);
    k1(2);k2(2);k3(2);k4(2);y(1,i+1);y(2,i+1)];
end
A
```

Príklad 6 *Metódou Rungeho-Kutta 4. rádu riešme*

$$y'' + y' - 6y = 0,$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y(0) &= 3, \\ y'(0) &= 1, \end{aligned}$$

s krokom $h = 0.1$ *na intervale* $[0, 0.5]$.

Zadanú dif. rovnicu 2. rádu

$$y'' = -y' + 6y,$$

transformujeme na sústavu dif. rovníc prvého rádu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_2 + 6y_1, \end{aligned}$$

a teda pre dve rovnice

$$\begin{aligned} y_1' &= F(x, y_1, y_2) = y_2, \\ y_2' &= G(x, y_1, y_2) = -y_2 + 6y_1, \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 3, \\ y_2(0) &= 1, \end{aligned}$$

riešime metódou Rungeho-Kutta 4. rádu, t. j.

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_{1_i}, y_{2_i}), \\ l_1 &= G(x_i, y_{1_i}, y_{2_i}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, y_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \\ l_2 &= G\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, y_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, y_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \\ l_3 &= G\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, y_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= F(x_i + h, y_{1_i} + hk_3, y_{2_i} + hl_3), \\ l_4 &= G(x_i + h, y_{1_i} + hk_3, y_{2_i} + hl_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{1_{i+1}} &= y_{1_i} + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ y_{2_{i+1}} &= y_{2_i} + \frac{1}{6}h \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \end{aligned}$$

Výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_{1_i}	3.0000	3.1836	3.5325	4.0508	4.7523	5.6597
y_{2_i}	1.0000	2.6631	4.3208	6.0686	7.9984	10.2035

Príklad 7 *Riešme Cauchyho počiatočnú úlohu určenú diferenciálnou rovnicou*

$$y' = y - t^2 + 1,$$

s počiatočnou podmienkou

$$y(0) = 0.5,$$

s krokom $h = 0.5$ *na intervale* $[0, 2]$*:*

a) *Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 1. rádu),*

b) *metódou Rungeho-Kutta 4. rádu.*

a) *Pre zadaní interval* $[0, 2]$ *a krok vytvoríme sieť uzlových bodov*

$$t_i = \{0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0\},$$

pre $i = 0, 1, 2, 3, 4$. *Eulerova metóda je určená vzťahom*

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(t_i, y_i) = y_i + 0.5 \cdot \left(y_i - t_i^2 + 1\right).$$

Výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4
t_i	0.0	0.5	1	1.5	2.0
y_i	0.5000	1.2500	2.2500	3.3750	4.4375

b) *Metóda Rungeho-Kutta 4. rádu je podobne určená vzťahmi*

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1\right), \\ k_3 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_2\right), \\ k_4 &= F(t_i + h, y_i + h \cdot k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$

výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4
t_i	0.0000	0.5	1	1.5	2.0000
k_1	1.5000	2.1751	2.6396	2.7568	
k_2	1.8125	2.4064	2.7370	2.6335	
k_3	1.8906	2.4642	2.7614	2.6027	
k_4	2.1953	2.6572	2.7703	2.3082	
y_i	0.5000	1.4251	2.6396	4.0068	5.3016

Príklad 8 *Metódou Rungeho-Kutta 4. rádu riešme*

$$y'' + y \cdot y' + 3y = \sin t,$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y(0) &= -1, \\ y'(0) &= 1, \end{aligned}$$

s krokom $h = 0.2$ na intervale $[0, 20]$.

Dif. rovnicu druhého rádu si transformujeme na sústavu dvoch dif. rovníc prvého rádu pomocou substitúcie

$$u_1 = y, \qquad u_2 = y'.$$

To znamená, že riešime sústavu

$$\begin{aligned} u_1' &= F(x_i, y_{1_i}, y_{2_i}) = u_2, \\ u_2' &= G(x_i, y_{1_i}, y_{2_i}) = -u_1 \cdot u_2 - 3u_1 + \sin t, \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} u_1(0) &= -1, \\ u_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Túto riešime metódou Rungeho-Kutta 4. rádu, t. j.

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, u_{1_i}, u_{2_i}), \\ l_1 &= G(x_i, u_{1_i}, u_{2_i}), \end{aligned}$$

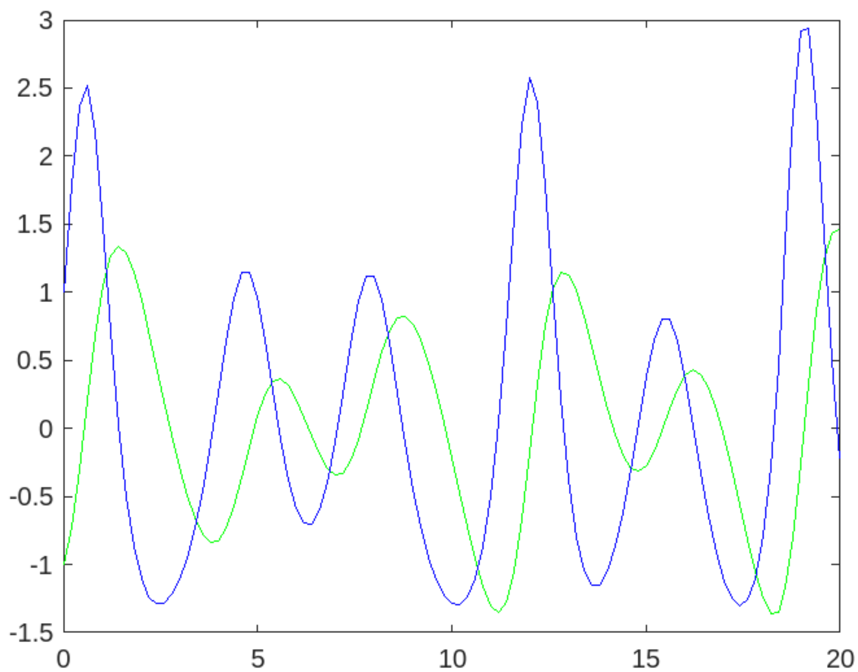
$$\begin{aligned} k_2 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \\ l_2 &= G\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \\ l_3 &= G\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= F(t_i + h, u_{1_i} + hk_3, u_{2_i} + hl_3), \\ l_4 &= G(t_i + h, u_{1_i} + hk_3, u_{2_i} + hl_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1_{i+1}} &= u_{1_i} + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ u_{2_{i+1}} &= u_{2_i} + \frac{1}{6}h \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4). \end{aligned}$$

Výsledok vidíme na obrázku




```
t = 0:0.2:20;
F = @ (t,u) [u(2);-u(1).*u(2)-3.*u(1)+sin(t)];
u = [-1; 1];
h = 0.2;
for i = 1:100
 k1 = F(t(i),u(:,i));
 k2 = F(t(i)+0.5*h,u(:,i)+0.5*h.*k1);
 k3 = F(t(i)+0.5*h,u(:,i)+0.5*h.*k2);
 k4 = F(t(i)+h,u(:,i)+h.*k3);
 u(:,i+1) = u(:,i) + h.*(k1+2.*k2+2.*k3+k4)./6;
end
figure
plot(t,u(1,:),'g',t,u(2,:),'b')
```

Príklad 9 *Riešme Cauchyho počiatočnú úlohu určenú diferenciálnou rovnicou*

$$y' = \frac{y \ln y}{x},$$

s počiatočnou podmienkou

$$y\,(2) = \mathrm{e},$$

pre 5 krokov na intervale $[2, \mathrm{e}]$*:*

a) *Eulerovou metódou (metóda Rungeho-Kutta 1. rádu),*

b) *metódou Rungeho-Kutta 4. rádu.*

a) *Eulerova metóda na riešenie ODE má tvar*

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i) = y_i + h \cdot \frac{y_i \ln y_i}{x_i},$$

pre zadaný počet krokov a interval $[2, \mathrm{e}]$ *určíme sieť uzlových bodov a získané výsledky zapíšeme do tabuľky*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2.0000	2.1437	2.2873	2.4310	2.5746	2.7183
y_i	2.7183	2.9135	3.1223	3.3456	3.5844	3.8397

b) *Metóda Rungeho-Kutta 4. rádu je podobne určená vzťahmi*

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1\right), \\ k_3 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_2\right), \\ k_4 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6} \cdot h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$

výsledky zapíšeme do tabuľky

i	0	1	2	3	4	5
x_i	2.0000	2.1437	2.2873	2.4310	2.5746	2.7183
k_1	1.3591	1.4604	1.5691	1.6860	1.8115	
k_2	1.4071	1.5119	1.6246	1.7456	1.8757	
k_3	1.4105	1.5155	1.6283	1.7495	1.8797	
k_4	1.4605	1.5693	1.6862	1.8117	1.9466	
y_i	2.7183	2.9207	3.1382	3.3719	3.6230	3.8928

Príklad 10 *Metódou Rungeho-Kutta 1. rádu riešme na intervale* $[0, 1]$ *s krokom* $h = 0.1$ *dif. rovnicu*

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 5y &= 10\mathrm{e}^t, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 2. \end{aligned}$$

Preznačením

$$\begin{aligned} u_1 &= y, \\ u_2 &= y', \end{aligned}$$

transformujeme zadanú dif. rovnicu druhého rádu na sústavu dif. rovníc prvého rádu

$$
\begin{aligned}
u_1' &= F(t, y, y') = F(t, u_1, u_2) = u_2, \\
u_2' &= y'' = G(t, y, y') = G(t, u_1, u_2) = -4u_2 - 5u_1 + 10\mathrm{e}^t, \\
u_1(0) &= 1, \\
u_2(0) &= 2.
\end{aligned}
$$

Túto sústavu riešime metódou Rungeho-Kutta 4. rádu, t. j.

$$
\begin{aligned}
k_1 &= F(x_i, u_{1_i}, u_{2_i}), \\
l_1 &= G(x_i, u_{1_i}, u_{2_i}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right), \\
l_2 &= G\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_1, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_1\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3 &= F\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right), \\
l_3 &= G\left(t_i + \frac{h}{2}, u_{1_i} + \frac{h}{2}k_2, u_{2_i} + \frac{h}{2}l_2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= F(t_i + h, u_{1_i} + hk_3, u_{2_i} + hl_3), \\
l_4 &= G(t_i + h, u_{1_i} + hk_3, u_{2_i} + hl_3),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{1_{i+1}} &= u_{1_i} + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
u_{2_{i+1}} &= u_{2_i} + \frac{1}{6}h \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4).
\end{aligned}
$$

Riešeniím je vektor $y = u_1$, ktorý uvádzame v tabuľke

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1.0000	1.1869	1.3546	1.5120	1.6668	1.8251	1.9922	2.1726	2.3703	2.5891	2.8321