2 Pravdepodobnosť

2.1 Pravdepodobnosť zjednotenia a pravdepodobnosť opačného javu

Príklad 1 *Zo sady 32 kariet náhodne vyberieme 3 karty, aká je pravdepodobnosť, že medzi nimi bude aspoň jedno eso?*

A: … „medzi vybranými kartami je aspoň jedno eso, t. j. jedno alebo dve alebo tri."

$$\left.\begin{array}{l} A_1\text{: … „medzi vybranými kartami je 1 eso."} \\ A_2\text{: … „medzi vybranými kartami je 2 eso."} \\ A_3\text{: … „medzi vybranými kartami je 3 eso."} \end{array}\right\}\text{ javy sú disjunktné,}$$

t. j. $A_1 \cup A_2 = \varnothing \wedge A_1 \cup A_3 = \varnothing \wedge A_2 \cup A_3 = \varnothing$, *preto platí*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= \frac{|A_1|}{|\Omega|} + \frac{|A_2|}{|\Omega|} + \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{C_1(4)}{C_3(32)} + \frac{C_2(4)}{C_3(32)} + \frac{C_3(4)}{C_3(32)} \\ &= \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{2}}{\binom{32}{3}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{1}}{\binom{32}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{0}}{\binom{32}{3}} = \frac{4 \cdot 378}{4960} + \frac{6 \cdot 28}{4960} + \frac{4 \cdot 1}{4960} \\ &= \frac{421}{1240} \doteq 0.340 = 34\%. \end{aligned}$$

Alebo jednoduchšie bude využiť pravdepodobnosť opačného javu k javu A,
$\overline{A}$*: … „medzi vybranými kartami nebude ani jedno eso."*

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{\left|\overline{A}\right|}{|\Omega|} = 1 - \frac{C_3(28)}{C_3(32)} \\ &= 1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = 1 - \frac{\frac{28!}{(28-3)!\cdot 3!}}{\frac{32!}{(32-3)!\cdot 3!}} = 1 - \frac{\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25!}{25!\cdot 3!}}{\frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29!}{29!\cdot 3!}} \\ &= 1 - \frac{\frac{28\cdot 27\cdot 26}{3!}}{\frac{32\cdot 31\cdot 30}{3!}} = 1 - \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{32 \cdot 31 \cdot 30} = 1 - \frac{819}{1240} \\ &= \frac{421}{1240} \doteq 0.340 = 34\%. \end{aligned}$$

Príklad 2 *V urne je 190 guliek, z ktorých každá je očíslovaná práve jedným z čísel 1,2,…,190. Náhodne z nej vytiahneme jednu guľku. Určme pravdepodobnosť toho, že vytiahnutá guľka je označená číslom, ktoré je deliteľné:*

a) *tromi,*

b) *štyrmi alebo šiestimi,*

c) *štyrmi alebo šiestimi alebo deviatim.*

A_k*: … „vytiahneme guľku deliteľnú číslom k* $(k \in 1, 2, \ldots, n = 190)$*."*

a) *Z čísel' 1,2,...,190 je práve 63 deliteľných troma* ($m = 63$)*, preto*

$$P(A_3) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} = \frac{63}{190} \doteq 0.332 = 33.2\%.$$

b) *Hľadáme prvd. zjednotenia javou, pre ktorú platí*

$$\begin{aligned} P(A_4 \cup A_6) &= P(A_4) + P(A_6) - P(A_4 \cap A_6) \\ &= \frac{47}{190} + \frac{31}{190} - \frac{15}{190} = \frac{63}{190} \doteq 0.332 = 33.2\%, \end{aligned}$$

keďže $A_4 \cap A_6 = A_{12}$*.*

c) *Obdobne*

$$\begin{aligned} P(A_4 \cap A_6) &= P(A_{12}) = \frac{15}{190}, \\ P(A_4 \cap A_9) &= P(A_{36}) = \frac{5}{190}, \\ P(A_6 \cap A_9) &= P(A_{18}) = \frac{10}{190}, \\ P(A_4 \cap A_6 \cap A_9) &= P(A_{36}) = \frac{5}{190}, \end{aligned}$$

a preto platí

$$\begin{aligned} P(A_4 \cup A_6 \cup A_9) &= P(A_4) + P(A_6) + P(A_9) \\ &\quad - P(A_4 \cap A_6) - P(A_4 \cap A_9) - P(A_6 \cap A_9) \\ &\quad + P(A_4 \cap A_6 \cap A_9) \\ &= \frac{47}{190} + \frac{31}{190} + \frac{21}{190} - \frac{15}{190} - \frac{5}{190} - \frac{10}{190} + \frac{5}{190} \\ &= \frac{74}{190} = \frac{37}{95} = 0.389 = 38.9\%. \end{aligned}$$

2.2 Úplný systém pravdepodobnosti a Bayesov vzorec

Príklad 3 *Majme desať rovnakých urien. V deviatich z nich je po dvoch čiernych a dvoch bielych guliach, v jednej je päť bielych a jedna čierna guľa. Z náhodne zvolenej urny bola vytiahnutá biela guľa. Aká je pravdepodobnosť toho, že guľa bola vytiahnutá z urny, ktorá obsahuje päť bielych guĺí.*

A: ... „Bola vytiahnutá biela guľa."

H_1*: ... „Bola vybraná urna, s dvoma bielymi guľami."*

H_2*: ... „Bola vybraná urna, s piatimi bielymi guľami."*

Je zrejmé, že platí

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{9}{10}, \\ P(H_2) &= \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

a tiež

$$\begin{aligned} P(A \mid H_1) &= \frac{1}{2}, \\ P(A \mid H_2) &= \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

a preto podľa Bayesovho vzorca platí

$$\begin{aligned} P(H_2 \mid A) &= \frac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{5}{32} \doteq 0.156 = 15.6\%. \end{aligned}$$

Príklad 4 *Do obchodu prišlo desať balíkov, z toho 5 balíkov obsahovalo 5 výrobkov 1. triedy a 3 výrobky 2. triedy, a tiež 2 balíky, ktoré obsahovali 6 výrobkov 1. triedy a 2 výrobky 2. triedy, a nakoniec 3 balíky so 7-mi výrobkami 1. triedy a 1 výrobkov 2. triedy.*

Určite prvd., že ak pri rozbaľovaní vyberieme výrobok 1. triedy, tento bude z jedného z prvých piatich balíkov!

Použijeme Bayesov vzorec a zároveň vzorec úplnej pravdepodobnosti.

H_1: … „Výrobok je z prvých piatich balíkov.“

H_2: … „Výrobok je z druhých dvoch balíkov.“

H_3: … „Výrobok je z tretích troch balíkov.“

A: … „Výrobok je 1. triedy.“

Zo zadania je zrejmé, že platí

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{5}{10}, \\ P(H_2) &= \frac{2}{10}, \\ P(H_3) &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

A takisto vieme, že

$$\begin{aligned} P(A \mid H_1) &= \frac{5}{8}, \\ P(A \mid H_2) &= \frac{6}{8}, \\ P(A \mid H_3) &= \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

A preto použitím Bayesovho vzorca dostávame

$$\begin{aligned} P(H_1 \mid A) &= \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(A)} \\ &= \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)} \\ &= \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{10} \cdot \frac{6}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{8}} = \frac{25}{58} \doteq 0.431 = 43.1\%. \end{aligned}$$

Príklad 5 *Je známe, že v Morseovej abecede pomer priemerného počtu vyslaných bodiek k počtu vyslaných čiarok je 5:3. Pri prenose sa skreslí v priemere päť percent bodiek (t. j. vyslaná bodka je prijatá ako čiarka) a skreslenie u čiarok je sedem percent. Určme pravdepodobnosť toho, že bola:*

a) *vyslaná čiarka, ak bola prijatá bodka,*

b) *vyslaná bodka, ak bola prijatá bodka.*

a) *Určíme (označíme) si základné javy*

H_b*: … „bola vyslaná bodka.“, kde zrejme platí* $P(H_b) = \frac{5}{8}$,

H_c*: … „bola vyslaná čiarka.“ a podobne je* $P(H_c) = \frac{3}{8}$.

A*: … „bola prijatá bodka“,*

kde jednotlivé podmienené pravdepodobnosti sú

$$\begin{aligned} P(A \mid H_b) &= 0.95, \\ P(A \mid H_c) &= 0.07, \end{aligned}$$

a teda pravdepodobnosť výskytu skreslenia je teda podľa vzorca plnej pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_b) \cdot P(A \mid H_b) + P(H_c) \cdot P(A \mid H_c) \\ &= \frac{5}{8} \cdot 0.95 + \frac{3}{8} \cdot 0.07 = 0.620 = 62\%. \end{aligned}$$

Čiže nami hľadaná pravdepodobnosť, že vyslaná čiarka je prijatá ako bodka, bude určená Bayesovým vzorcom

$$\begin{aligned} P(H_c \mid A) &= \frac{P(H_c) \cdot P(A \mid H_c)}{P(H_b) \cdot P(A \mid H_b) + P(H_c) \cdot P(A \mid H_c)} \\ &= \frac{P(H_c) \cdot P(A \mid H_c)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot 0.07}{0.620} \doteq 0.0423 = 4.23\%. \end{aligned}$$

b) *Pravdepodobnosť, že vyslaná bodka je prijatá ako bodka, bude určená Bayesovým vzorcom*

$$\begin{aligned} P(H_b \mid A) &= \frac{P(H_b) \cdot P(A \mid H_b)}{P(H_b) \cdot P(A \mid H_b) + P(H_c) \cdot P(A \mid H_c)} \\ &= \frac{P(H_b) \cdot P(A \mid H_b)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{8} \cdot 0.95}{0.620} = 0.957\,7 = 95.77\%. \end{aligned}$$

Príklad 6 *Na love divokého diviaka, ktorý bol zastrelený jednou jedinou strelou. Polovníci sú traja. Máme určiť pravdepodobnosť, že diviaka zastrelil prvý, druhý* *alebo tretí lovec, ak sú pravdepodobnosti zásahu jednotlivými strelcami* 0.2, 0.4, 0.6.

A: ... „Diviak bol zabitý jedinou strelou.“

H_i: ... „Diviaka i-tý polovník (a ostatní netrafili).“

$$\begin{aligned} P(H_1) &= P_1 \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3} = P_1 \cdot \overline{P_2} \cdot \overline{P_3} = 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 0.048, \\ P(H_2) &= \overline{P_1} \cap P_2 \cap \overline{P_3} = \overline{P_1} \cdot P_2 \cdot \overline{P_3} = 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.128, \\ P(H_3) &= \overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap P_3 = \overline{P_1} \cdot \overline{P_2} \cdot P_3 = 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.288, \end{aligned}$$

okrem toho zrejme platí

$$P(A \mid H_1) = P(A \mid H_2) = P(A \mid H_3) = 1,$$

a preto

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) \\ &= P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + P(H_3) \cdot P(A \mid H_3) \\ &= 0.048 \cdot 1 + 0.128 \cdot 1 + 0.288 \cdot 1 = 0.464. \end{aligned}$$

Pravdepodobnosti zásahu jednotlivých polovníkov teda sú

$$\begin{aligned} P(H_1 \mid A) &= \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0.048 \cdot 1}{0.464} \doteq 0.103 = 10.3\%, \\ P(H_2 \mid A) &= \frac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0.128 \cdot 1}{0.464} \doteq 0.276 = 27.6\%, \\ P(H_3 \mid A) &= \frac{P(H_3) \cdot P(A \mid H_3)}{P(A)} = \frac{0.288 \cdot 1}{0.464} \doteq 0.621 = 62.1\%. \end{aligned}$$

Príklad 7 *V dome sa nachádza päť bytov. V jednom žijú dvaja muži, v jednom žena a traja muži, v jednom dve ženy a traja muži, v ďalšom šesť žien a jeden muž a v poslednom žije manželský pár. Ak zaklopeme na dvere a otvorí žena, s akou pravdepodobnosťou stojíme pri byte, v ktorom žije manželský pár?*

A: ... „Otvorí žena.“

H_1: ... „V byte zijú 2 muži.“

H_2: ... „V byte zijú 1 žena a 3 muži.“

H_3: ... „V byte zijú 2 ženy a 3 muži.“

H_4: ... „V byte zijú 6 žien a 1 muž.“

H_5: ... „V byte zije manželský pár.“

Zrejme platí

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = P(H_5) = \frac{1}{5}$$

a

$$\begin{aligned} P(A \mid H_1) &= 0, \\ P(A \mid H_2) &= \frac{1}{4}, \\ P(A \mid H_3) &= \frac{2}{5}, \\ P(A \mid H_4) &= \frac{6}{7}, \\ P(A \mid H_5) &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

a preto

$$\begin{aligned} P(H_5 \mid A) &= \frac{P(H_5) \cdot P(A \mid H_5)}{\sum\limits_{i=1}^{5} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)} \\ &= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{70}{281} \doteq 0.25 = 25\%. \end{aligned}$$

2.3 Bernoulliho vzorec pre pravdepodobnosť opakujúceho sa javu

Príklad 8 *Určme pravdepodobnosť, že pri hode troma hracími kockami padne číslo 6 práve dva krát.*

A_j: ... *„Na j-tej kocke padne číslo 6.“*

$$\begin{aligned} P(A_j) &= \frac{1}{6}, \\ P(\overline{A}_j) &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

B: ... *„pri hode troma hracími kockami padne číslo 6 práve dva krát.“*

$$B = \left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right)$$

odkiaľ zrejme

$$P(B) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right) + P\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right),$$

keďže A_1, A_2, A_3, resp. $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ sú nezávislé, platí

$$\begin{aligned} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}, \\ P\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}, \\ P\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}. \end{aligned}$$

A celkovo

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right) + P\left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right) \\ &= \frac{5}{216} + \frac{5}{216} + \frac{5}{216} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} \doteq 0.069 = 6.9\%. \end{aligned}$$

To isté by sme dostali použitím Bernoulliho vzorca pre k násobný výskyt javu s prvd. p pri n násobnom opakovaní, t. j.

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

V našom prípade, $k = 2, n = 3, p = \frac{1}{6}$, *a teda*

$$P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} = \frac{5}{72} \doteq 0.069 = 6.9\%.$$

Príklad 9 *40% výrobkov určitého druhu má výbornú kvalitu, niekto si kúpil 13 výrobkov, aká je prvd., že:*

a) *práve 6 z nich má výbornú kvalitu,*

b) *aspoň 3 majú výbornú kvalitu.*

a) *Pravdepodobnosť 6-násobného výskytu javu pri 13 násobnom pokuse s prvd.* $p = 40\% = 0.4$ *je daná Bernoulliho vzorcom*

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

a teda v našom prípade platí

$$\begin{aligned} P_{13}(6) &= \binom{13}{6} \cdot 0.4^6 \cdot (1-0.4)^{13-6} \\ &\doteq 0.197 = 19.7\%. \end{aligned}$$

b) *Zrejme platí*

$$\begin{aligned} P &= 1 - P_{13}(2) - P_{13}(1) - P_{13}(0) \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{2} \binom{13}{j} \cdot 0.4^j \cdot (1-0.4)^{13-j} \doteq 0.942. \end{aligned}$$