9 Singulárny rozklad matice

Príklad 1 *Nájdime singulárny rozklad matice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hľadáme maticu U, ktorá je tvorená vlastnými vektormi matice $A \cdot A^T$. A teda

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 34 \end{pmatrix}.$$

ktorá má charakteristickú rovnicu

$$\begin{aligned} \det\left(A \cdot A^T - \lambda I\right) &= \begin{vmatrix} 16-\lambda & 12 \\ 12 & 34-\lambda \end{vmatrix} = (16-\lambda)(34-\lambda) - 12 \cdot 12 \\ &= \lambda^2 - 50\lambda + 400 = 0. \end{aligned}$$

Riešime pomocou diskriminantu

$$D = 50^2 - 4 \cdot 1 \cdot 400 = 2500 - 1600 = 900,$$

a preto

$$\lambda_{1,2} = \frac{50 \pm 30}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 40, \\ \lambda_2 = 10. \end{cases}$$

Nájdeme vlastné vektory prislúchajúce vlastnému číslu $\lambda_1 = 40$, ktoré sú riešením homogénnej sústavy

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 16-\lambda_1 & 12 \\ 12 & 34-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 16-40 & 12 \\ 12 & 34-40 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{-24} & \mathbf{12} \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ktorú riešime rozvojom podľa prvého riadku

$$\begin{aligned} u_{1_1} &= (-1)^{1+1} \det(-6) \cdot k = -6k, \\ u_{1_2} &= (-1)^{1+2} \det(12) \cdot k = -12k, \qquad \textit{kde } k \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

bez ujmy na všeobecnosti je jedným z riešení vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ktorý znormalizujeme

$$\widetilde{\mathbf{u}}_1^T = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Pre vlastné číslo $\lambda_2 = 10$ *riešime sústavu*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 16-\lambda_2 & 12 \\ 12 & 34-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 16-10 & 12 \\ 12 & 34-10 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{12} \\ 12 & 24 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

opäť napríklad rozvojom prvého riadku

$$\begin{aligned} u_{2_1} &= (-1)^{1+1} \det(24) \cdot k = 24k, \\ u_{2_2} &= (-1)^{1+2} \det(12) \cdot k = -12k, \end{aligned}$$

bez ujmy na všeobecnosti je jedným riešením napríklad vektor $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, *ktorý opäť znormalizujeme*

$$\mathbf{u}_2^T = \frac{(2,-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right).$$

Matica U *má tvar*

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Hľadáme maticu V, *ktorá je tvorená vlastnými vektormi matice* $A^T \cdot A$, *preto*

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 25 \end{pmatrix},$$

ktorá má charakteristickú rovnicu

$$\begin{aligned} \det\left(A^T \cdot A - \lambda I\right) &= \begin{vmatrix} 25-\lambda & -15 \\ -15 & 25-\lambda \end{vmatrix} = (25-\lambda)(25-\lambda) - 15 \cdot 15 \\ &= \lambda^2 - 50\lambda + 400, \end{aligned}$$

a jej vlastné čísla budú opäť $\lambda_1 = 40$ *a* $\lambda_2 = 10$. *Pre prvé vlastné číslo hľadáme vlastný vektor, ktorý vyhovuje homogénnemu systému*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 25-\lambda_1 & -15 \\ -15 & 25-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} 25-40 & -15 \\ -15 & 25-40 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} -15 & -15 \\ -15 & -15 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Je zrejmé že riešením je napríklad vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*, ktorý znormalizujeme*

$$\widetilde{\mathbf{v}}_1^T = \frac{(1,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right).$$

Pre druhé vlastné číslo $\lambda_2 = 10$ *riešime sústavu*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 25-\lambda_2 & -15 \\ -15 & 25-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} 25-10 & -15 \\ -15 & 25-10 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

ktorá má riešenie $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*, ktorý znormalizujeme*

$$\widetilde{\mathbf{v}}_2^T = \frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

A matica V je

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

pre rekompozíciu pooužijeme jej transponovaný tvar

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Zrejme platí

$$\begin{aligned}
U \cdot S \cdot V^T &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{40} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10} & 0 \\ \frac{3}{10}\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10} & -\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.0 & 0 \\ 3.0 & -5.0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Príklad 2 *Nájdime singulárny rozklad matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hľadáme maticu U, tvorenú vlastnými vektormi matice

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ktorá má charakteristickú rovnicu

$$\begin{aligned}\det\left(A \cdot A^T - \lambda \cdot I\right) &= 0,\\ \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0,\end{aligned}$$

čiže

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda\left(\lambda-6\right)\left(\lambda-1\right) = 0$$

preto vlastné čísla tejto matice sú

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 6,\\ \lambda_2 &= 1,\\ \lambda_3 &= 0.\end{aligned}$$

Ku vla. č. $\lambda_1 = 6$ *bude prislúchať vlastný vektor vyhovujúci homogénnemu systému lineárnych rovníc*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0},\\ \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

ktorú riešime rozvojom napr. 1 riadka a dostávame

$$\begin{aligned}u_{1_1} &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = 25k,\\ u_{1_2} &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \cdot k = 5k,\\ u_{1_3} &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = 10k,\end{aligned}$$

a jedným z riešení je napríklad vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$*, ktorý znormalizujeme*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{u}}_1^T &= \frac{\mathbf{u}_1^T}{|\mathbf{u}_1|} = \frac{(5,1,2)^T}{\sqrt{5^2+1^2+2^2}} = \frac{(5,1,2)^T}{\sqrt{30}} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}\right)^T\\ &= \left(\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}\right)^T.\end{aligned}$$

Pre vlastné č. $\lambda_2 = 1$ *riešime sústavu*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda_2 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

ktorú riešime rozvojom podľa druhého riadku

$$\begin{aligned}
u_{2_1} &= (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = 0, \\
u_{2_2} &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = -4k, \\
u_{2_3} &= (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot k = 2k,
\end{aligned}$$

teda $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, *ktorý tiež znormujeme*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{u}}_2^T &= \frac{\mathbf{u}_2^T}{|\mathbf{u}_2|} = \frac{(0,2,-1)}{\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^T \\
&= \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}\right)^T.
\end{aligned}$$

A pre vlastné číslo $\lambda_3 = 0$ *riešime homogénnu sústavu*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5-\lambda_3 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda_3 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_3 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_3 &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

riešime rozvojom prvého riadka

$$\begin{aligned}
u_{3_1} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} k = k, \\
u_{3_2} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} k = -k, \\
u_{3_3} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} k = -2k
\end{aligned}$$

teda $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$*, ktorý takisto znormujeme*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{u}}_3^T &= \frac{\mathbf{u}_3^T}{|\mathbf{u}_3|} = \frac{(1,-1,-2)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)^T \\ &= \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right)^T. \end{aligned}$$

Matica V bude tvorená vlastnými vektormi matice

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

ktorá bude mať tie isté vlatsné čísla (okrem nulového) ako matica $A \cdot A^T$, keďže jej charakteristická rovnica je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0.$$

Pre $\lambda_1 = 6$ riešime

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-6 & 2 \\ 2 & 5-6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

rozvojom prvého riadku by sme dostali napríklad jedno z riešení $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$*, ktorý má normlizovaný tvar* $\widetilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

A podobne pre $\lambda_2 = 1$ riešime sústavu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 2 & 5-1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ktorá má napríklad riešenie $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$*, ktorý má normlizovaný tvar* $\widetilde{\mathbf{v}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$.

Čiže matica U má stĺpce tvorené vlastnými vektormi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, teda

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{30}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

a podobne matica

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

avšak do redekompozície dosádzame jej transponovaný tvar (v tomto prípade totožný)

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} U \cdot S \cdot V^T &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{30}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{30}}{15} & \frac{-\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{30}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} & \frac{1}{15}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} \\ \frac{1}{150}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} + \frac{4}{5} & \frac{1}{75}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} - \frac{2}{5} \\ \frac{1}{75}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} - \frac{2}{5} & \frac{2}{75}\sqrt{5}\sqrt{6}\sqrt{30} + \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 1.0 & -1.262\,2 \times 10^{-29} \\ -1.262\,2 \times 10^{-29} & 1.0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Príklad 3 *Nájdime singulárny rozklad matice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hľadáme maticu U, ktoreej stĺpce sú vlastné vektory matice

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}.$$

Vlastné čísla tejto matice vyhovújú charakteristickej rovnici

$$\det\left(A \cdot A^T - \lambda \cdot I\right) = 0,$$

a teda v našom prípade to je

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 8 \\ 8 & 17-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 34\lambda + 225 = (\lambda - 25)(\lambda - 9) = 0.$$

Tým sme našli vlastné čísla tejto matice, ktoré budú usporiadané zostupne

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 25,\\ \lambda_2 &= 9.\end{aligned}$$

Pre prvé vlastné číslo $\lambda_1 = 25$ *hľadáme ku nemu prislúchajúci vlasttný vektor ako riešenie homogénneho systému lineárnych rovníc tvaru*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 17-\lambda_1 & 8 \\ 8 & 17-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0},\\ \begin{pmatrix} 17-25 & 8 \\ 8 & 17-25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1_1} \\ u_{1_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

čiže

$$\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1_1} \\ u_{1_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alebo

$$\begin{aligned} I &: \ -8u_{1_1} + 8u_{1_2} = 0,\\ II &: \ 8u_{1_1} - 8u_{1_2} = 0,\end{aligned}$$

ktorej netriviálnym riešením je zrejme $u_{1_1} = k$ *a* $u_{1_2} = k$*, kde* $k \in \mathbb{R}$*, teda vektor*

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1_1} \\ u_{1_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

A bez ujmy na všeobecnosti môžeme za hľadaný vektor vziať napríklad

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ktorý znormalizujeme

$$\widetilde{\mathbf{u}}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{|\mathbf{u}_1|} = \frac{(1,1)^T}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,1)^T = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T.$$

Podobne pre vlastné číslo $\lambda_2 = 9$ *je ku nemu prislúchajúci vlastný vektor riešením lineárnej homogénnej sústavy*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 17-\lambda_2 & 8 \\ 8 & 17-\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0},\\ \begin{pmatrix} 17-9 & 8 \\ 8 & 17-9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{2_1} \\ u_{2_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{2_1} \\ u_{2_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

a teda

$$\begin{aligned} I &: 8u_{2_1} + 8u_{2_2} = 0, \\ II &: 8u_{2_1} + 8u_{2_2} = 0, \end{aligned}$$

ktorej netriviálnym riešením je $u_{2_1} = k$ *a* $u_{2_2} = -k$*, kde* $k \in \mathbb{R}$*, čiže*

$$\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} u_{2_1} \\ u_{2_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Opäť bez ujmy na všeobecnosti zvolíme za jedno z riešení napríklad vektor

$$\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ktorý znormalizujeme

$$\widetilde{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{u_2}}{|\mathbf{u_2}|} = \frac{(1,-1)^T}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^T.$$

A takto sme získali hľadanú maticu U *stĺpcovo tvorenú normalizovanými vlastnými vektormi matice* $A \cdot A^T$ *v tvare*

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Teraz si určíme maticu V*, ktorej stĺpce budú vlastnými vektoormi matice*

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix},$$

vlastné čísla tejto matice sú korene charakteristickej rovnice

$$\det\left(A^T \cdot A - \lambda \cdot I\right) = 0,$$

a teda

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 34\lambda^2 - 225\lambda = -\lambda(\lambda - 25)(\lambda - 9) = 0.$$

Čo nastane pre tri korene - vlastné čísla (usporiadané zostupne)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 25, \\ \lambda_2 &= 9, \\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pre prvé vlastné číslo $\lambda_1 = 25$ nájdeme k nemu prislúchajúci vlastný vektor ako riešenie homogénnej sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 13-\lambda_1 & 12 & 2 \\ 12 & 13-\lambda_1 & -2 \\ 2 & -2 & 8-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} 13-25 & 12 & 2 \\ 12 & 13-25 & -2 \\ 2 & -2 & 8-25 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} \mathbf{-12} & \mathbf{12} & \mathbf{2} \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

ktorú riešime rozvojom podľa prvého riadku

$$\begin{aligned}
v_{1_1} &= (-1)^{1+1} \cdot k \cdot \begin{vmatrix} -12 & -2 \\ -2 & -17 \end{vmatrix} = 200k, \\
v_{1_2} &= (-1)^{1+2} \cdot k \cdot \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 2 & -17 \end{vmatrix} = 200k, \\
v_{1_3} &= (-1)^{1+3} \cdot k \cdot \begin{vmatrix} 12 & -12 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Riešením je vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, *kde* $k \in \mathbb{R}$. *Z všetkých týchto riešení, vezmeme napríklad* $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *ktorý normnormalizujeme*

$$\widetilde{\mathbf{v}}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \frac{(1,1,0)^T}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)^T.$$

Pre $\lambda_2 = 9$ *riešime*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 13-9 & 12 & 2 \\ 12 & 13-9 & -2 \\ 2 & -2 & 8-9 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0}, \\
\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{12} & \mathbf{2} \\ 12 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

rozvojom prvého riadku

$$\begin{aligned} v_{2_1} &= (-1)^{1+1} \cdot k \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -8k, \\ v_{2_2} &= (-1)^{1+2} \cdot k \cdot \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8k, \\ v_{2_3} &= (-1)^{1+3} \cdot k \cdot \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -32k. \end{aligned}$$

Z riešení $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ 4k \end{pmatrix}$, *kde* $k \in \mathbb{R}$, *vyberieme napríklad* $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, *ktoré bude po normalizácii mať tvar*

$$\widetilde{\mathbf{v}}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{(1,-1,4)^T}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \left(\frac{\sqrt{18}}{18}, \frac{-\sqrt{18}}{18}, \frac{2\sqrt{18}}{9} \right)^T = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{-\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^T.$$

Pre posledné vlastné číslo $\lambda_3 = 0$ *nájdeme k nemu príslušný vlastný vektor ako riešenie sústavy*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{12} & \mathbf{2} \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

odkiaľ rozvojom prvého riadku dostávame

$$\begin{aligned} v_{3_1} &= (-1)^{1+1} \cdot k \cdot \begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -50k, \\ v_{3_2} &= (-1)^{1+2} \cdot k \cdot \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -100k, \\ v_{3_3} &= (-1)^{1+3} \cdot k \cdot \begin{vmatrix} 13 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 100k, \end{aligned}$$

vektor $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -2k \end{pmatrix}$, *kde* $k \in \mathbb{R}$, *a pre napríklad* $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *je normalizovaný tvar*

$$\widetilde{\mathbf{v}}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{|\mathbf{v}_3|} = \frac{(1,2,-2)^T}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right)^T.$$

Tým sme našli maticu

$$V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

Samotný singulárny rozklad má tvar

$$\begin{aligned} U \cdot S \cdot V^T &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{25} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$