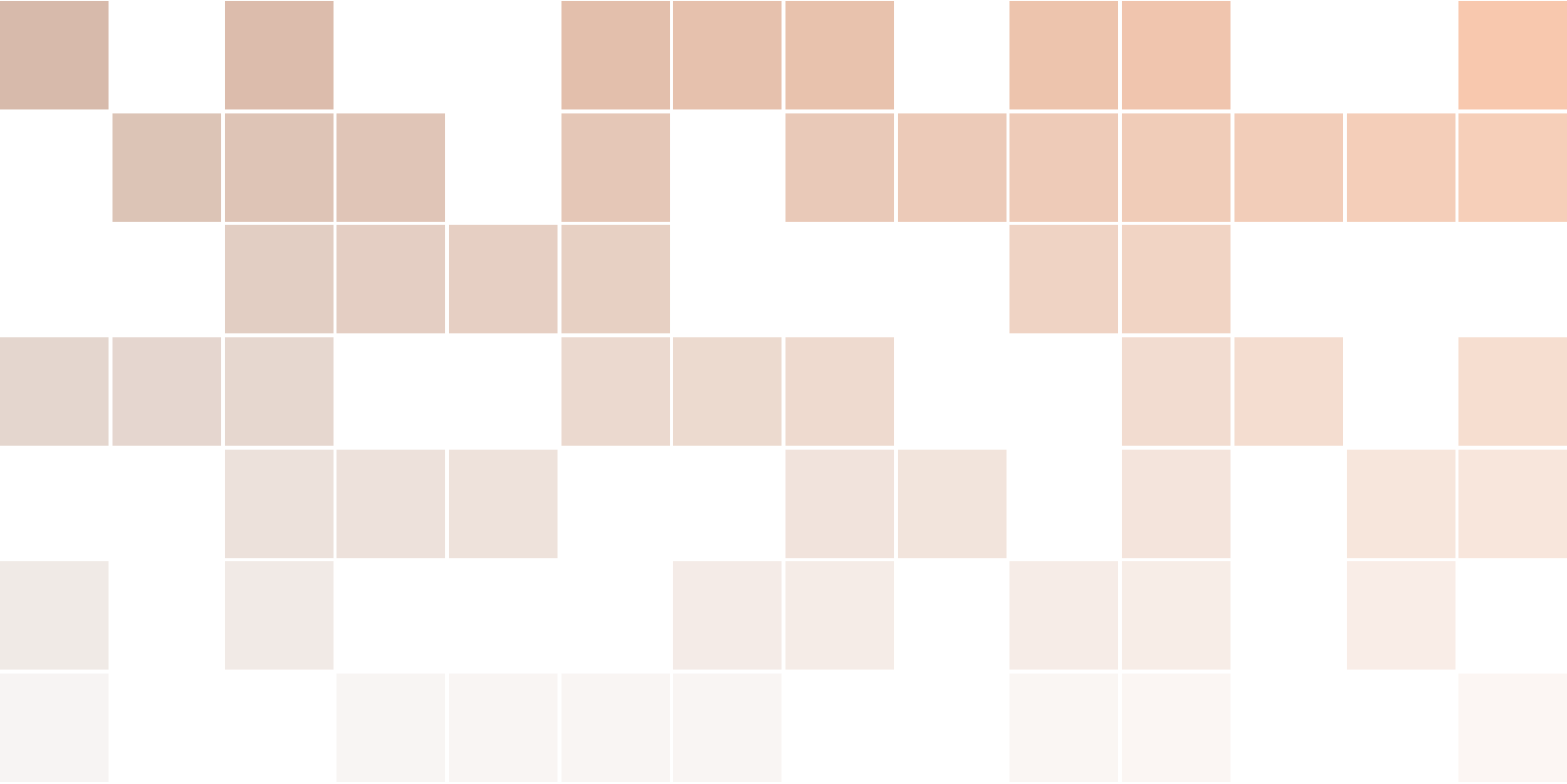
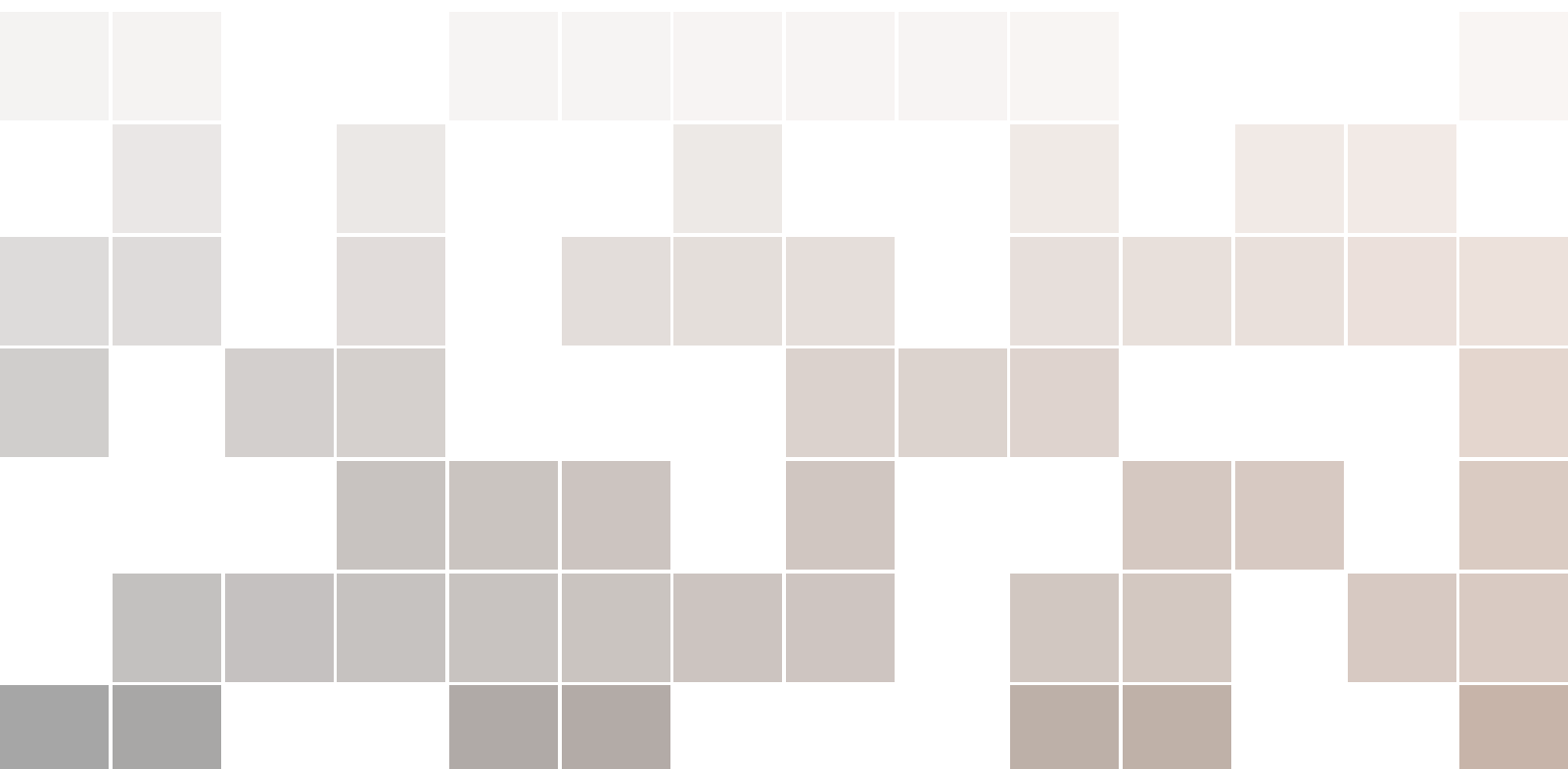




Štatistické a numerické metódy

Učebný text

Pavol ORŠANSKÝ, Branislav FTOREK



Obsah

Základy matematickej štatistiky

1	Kombinatorika	11
1.1	Variácie bez opakovania	11
1.2	Variácie s opakováním	12
1.3	Permutácie bez opakovania	12
1.4	Permutácie s opakováním	12
1.5	Kombinačné čísla	13
1.6	Kombinácie bez opakovania	15
1.7	Kombinácie s opakováním	15
2	Teória pravdepodobnosti	17
2.1	Náhodný jav	17
2.1.1	Algebraické operácie a relácie s javmi	18
2.2	Klasická definícia pravdepodobnosti	19
2.3	Kolmogorova definícia pravdepodobnosti	20
2.4	Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov	22
2.5	Pravdepodobnosť opačného javu	24
2.6	Podmienená pravdepodobnosť	25
2.7	Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov	26
2.8	Vzorec úplnej pravdepodobnosti	29
2.9	Bayesov vzorec	31
2.10	Bernoulliho vzorec	32

3	Náhodná premenná (veličina)	33
3.1	Diskrétné rozdelenie pravdepodobnosti	33
3.2	Distribučná funkcia náhodnej premennej	35
3.3	Hustota rozdelenia	36
3.3.1	Základné vlastnosti hustoty rozdelenia	37
3.4	Číselné charakteristiky náhodnej premennej	39
3.4.1	Stredná hodnota	39
3.4.2	Rozptyl (disperzia) a smerodajná odchýlka	40
3.4.3	Všeobecné momenty	41
3.4.4	Centrálny moment	41
3.4.5	Vzťah medzi $D(\xi)$, m_1 a m_2	42
4	Diskrétné rozdelenia pravdepodobnosti	43
4.1	Binomické rozdelenie	43
4.2	Poissonovo rozdelenie	44
5	Spojité rozdelenia pravdepodobnosti	45
5.1	Rovnomerné rozdelenie	45
5.2	Normálne rozdelenie (Laplace-Gaussovo rozdelenie)	46
5.3	Normálne normované rozdelenie	46
5.3.1	Vzťah medzi $F(x)$ a $\Phi(x)$	48
5.4	Gamma rozdelenie	50
5.5	Exponenciálne rozdelenie	51
5.5.1	Alternatívna parametrizácia	51
6	Popisná štatistika	53
7	Odhady parametrov	57
7.1	Bodový odhad	57
7.2	Intervalový odhad parametrov	60
7.2.1	$100 \cdot (1 - \alpha)\%$ obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ	61
7.2.2	$100 \cdot (1 - \alpha)\%$ obojstranný interval spoľahlivosti pre rozptyl σ^2	64
8	Testovanie štatistických hypotéz	67
8.1	Parametrické testovanie jedného súboru	67
8.1.1	Testovanie parametra μ ak je súbor malý ($n \leq 30$)	68
8.1.2	Testovanie parametra μ ak je súbor veľký ($n > 30$)	70
8.1.3	Testovanie parametra σ	71
8.2	Porovnávanie dvoch súborov	73
8.2.1	Test o zhode priemerov, ak sú súbory veľké ($n > 30$) a σ_1, σ_2 poznáme	73
8.2.2	Test o zhode priemerov, ak sú súbory malé ($n \leq 30$) a σ_1, σ_2 poznáme	74
8.2.3	Test o zhode priemerov, ak súbory sú veľké ($n > 30$) a σ_1, σ_2 nepoznáme	74
8.2.4	Test o zhode priemerov, ak sú súbory malé ($n \leq 30$) a σ_1, σ_2 nepoznáme	75

9	Korelačná analýza	77
9.1	Koeficient kovariancie	77
9.2	Koeficient korelácie	78
9.3	Koeficient determinácie	78
10	Párová lineárna regresia	83
10.1	Regresná priamka	83
10.2	Odhad parametrov β_0 a β_1	84

Numerická matematika

11	Chyby numerických algoritmov	89
11.0.1	Zdroje a typy chýb	89
11.0.2	Definícia chyby	89
11.0.3	Zaokrúhľovanie - zaokrúhľovacie chyby	90
11.1	Podmienenosť numerických úloh a numerická stabilita algoritmov	90
12	Numerické riešenie nelineárnej rovnice	93
12.1	Metóda polenia intervalu (bisekcie)	93
12.2	Metóda regula falsi	95
12.3	Metóda prostej iterácie	97
12.4	Metóda sečníc	100
12.5	Newtonova metóda dotyčníc	101
13	Numerické riešenie nelineárnych systémov	105
14	Numerické riešenie sústav lineárnych rovníc	109
14.1	Cramerovo pravidlo	110
14.2	Gaussova eliminačná metóda	111
14.3	Riešenie lineárnych sústav pomocou inverznej matice	113
14.4	LU rozklad	113
14.5	Choleskyho rozklad	116
14.6	Singulárny rozklad matice	118
14.7	Jacobiho metóda	126
14.8	Gauss-Seidelova metóda	129
15	Interpolácia	131
15.1	Lagrangeova interpolácia	132
15.2	Newtonova interpolácia	133
15.2.1	Newtonov interpolačný polynóm pre ekvidištantné uzly	136
15.3	Odhad chyby interpolačného polynómu	137

16	Aproximácia funkcií	139
16.1	Aproximácia metódou najmenších štvorcov (diskrétny variant)	139
17	Numerické integrovanie	143
17.1	Newton-Cotesove kvadrátúrne vzorce	143
17.1.1	Elementárne uzavreté Newton-Cotesove vzorce	144
17.1.2	Zložené uzavreté Newton-Cotesove vzorce	146
17.2	Gaussova kvadratúra	148
17.2.1	Ortogonálne polynómy	148
17.2.2	Klasické ortogonálne polynómy	150
17.2.3	Gaussova kvadrátúrna formula	152
18	Numerické riešenie diferenciálnych rovníc	157
18.0.1	Cauchyho počiatočná úloha	157
18.1	Eulerova metóda	159
18.2	Modifikovaná Eulerova metóda	160
18.3	Metóda Runge-Kutta 4. rádu	160
18.4	Viackrokové metódy riešenia diferenciálnych rovníc	161
18.4.1	Adams-Bashforthove metódy	163
18.4.2	Adams-Moultenove metódy	163
18.4.3	Metódy prediktor-korektor	163
18.5	Riešenie sústav diferenciálnych rovníc	165
18.6	Riešenie diferenciálnych rovníc vyššieho rádu	166
19	Prílohy	169
19.1	Tabuľky základných rozdelení pravdepodobnosti	169
	Literatúra	173
	Zdroje	173

Predslov

Tento text vznikol na základe prirodzenej požiadavky študentov na prehľadnú ucelenú publikáciu venujúcu sa výlučne oblastiam štatistiky a numerickej matematiky, obsiahnutých v ich základnom kurze. Väčšina doterajších textov bola buď príliš rozsiahla, a teda pre čitateľa odrádzajúca, alebo naopak niektoré publikácie obsahovali učivo výlučne stredoškolské. Nároky na študentov vysokých škôl sa v poslednej dobe výrazne zmenili, preto vznikla aj medzera v odbornej literatúre, kedy chýbajú knihy pokrývajúce akýsi medzistupeň od stredoškolskej literatúry a literatúry vyslovene univerzitného typu. Máme na mysli knihy kladúce na čitateľa miernejšie nároky ako tomu bývalo v minulosti. Túto medzeru sme sa snažili vyplniť prepisom prednášok do prijateľnej formy. Text sme navyše obohatili o riešené ale aj neriešené príklady, ktoré sme čerpali z vlastných zdrojov resp. z citovanej literatúry.

Tento text nenahrádza niektoré, podľa nášho názoru, výborné publikácie iných autorov, ale určitým spôsobom sa snaží priblížiť modernému študentovi.

Publikácia je rozdelená na dve časti. Prvá sa venuje štatistickým metódam a druhá numerickým metódam. Prvá kapitola je venovaná kombinatorike, ktorá už v niektorých prípadoch úplne zmizla zo stredoškolských osnov, a preto pokladáme za nutnosť sa jej v obmedzenej miere v texte venovať.

V druhej kapitole je definovaný samotný pojem pravdepodobnosti, zaoberáme sa tu jej základnými operáciami.

Tretia kapitola popisuje vlastnosti náhodnej premennej.

Vo štvrtej a piatej kapitole sú popísané niektoré základné rozdelenia pravdepodobnosti.

V šiestej kapitole sú základy popisnej štatistiky, nevyhnutného základu pre spracovanie údajov.

Siedma kapitola sa zaoberá problematikou odhadu parametrov základného súboru s normálnym rozdelením.

Ôsma kapitola je venovaná testovaniu štatistických hypotéz o parametroch súboru.

Deviata a desiatka kapitola rozoberá problematiku lineárnej závislosti súborov.

Jedenásta kapitola je akýmsi úvodom do problematiky numerickej matematiky, rozoberieme si numerické algoritmy, ich stabilitu ako aj chyby vznikajúce pri použití týchto algoritmov.

V dvanástej kapitole uvedieme prehľad základných metód numerického riešenia nelineárnej rovnice.

Následne sa v trinástej kapitole pristavíme pri zovšeobecnení týchto metód na riešenie sústavy nelineárnych rovníc.

Štrnásť kapitola poskytuje základný prehľad riešenia sústav lineárnych rovníc.

Päťnásť kapitola priblíži problematiku interpolácie funkcie.

Podobne šesťnásť kapitola sa venuje aproximácii funkcie metódou najmenších štvorcov.

V sedemnásť kapitole uvedieme spôsoby numerickej integrácie.

Posledná osemnásť kapitola sa zaoberá asi najpoužívanejšou úlohou a to numerickým riešením diferenciálnych rovníc.

V neposlednom rade, by sme radi poďakovali kolegovi a dobrému priateľovi RNDr., Ing. Jánovi RYBÁRIKOVI, CSc. za podporu ako aj cenné rady skúseného pedagóga, bez ktorých by tento text nemohol vzniknúť, doc. RNDr. Elene WISZTOVEJ, CSc. za inšpiráciu pre samotný vznik tohto textu a Ing. Petrovi TOMAŠOVIČOVI za grafickú a editorskú podporu. Takisto ďakujeme študentom za pripomienkovanie.

Žilina 13. II. 2017

autori

1. Kombinatorika

Táto časť poskytuje nevyhnutný základ z teórie kombinatoriky potrebný pre štúdium pravdepodobnosti. Uvedieme tu definície a vzťahy pre výpočet variácií, permutácií a kombinácií (s opakovaním alebo bez opakovania). Zavedieme pojem kombinačné číslo ako aj vzťahy pre jeho použitie. Tieto vedomosti sú samozrejme čitateľovi známe zo strednej školy, uvádzame ich iba kvôli ozrejmieniu možných medzier v danej problematike.

1.1 Variácie bez opakovania

Definícia 1.1.1 Variáciami k -tej triedy z n prvkov bez opakovania nazývame usporiadané k -tice vytvorené z n prvkov, pričom sa žiadny prvok neopakuje.

Symbolicky variácie k -tej triedy z n prvkov bez opakovania označujeme ako $V_k(n)$ a platí

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

R V prípade variácií bez opakovania nám záleží na poradí a prvky sa neopakujú.

■ **Príklad 1.1** Koľko rôznych 3-ciferných čísel môžeme vytvoriť z číslíc 1, 2, 3, 4, 5, ak sa žiadna číslica neopakuje.

Zrejme sa bude jednať o trojice z päť prvkov, tj. $k = 3$ a $n = 5$,

$$V_3(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 60.$$

■

1.2 Variácie s opakovaním

Definícia 1.2.1 Variáciami k -tej triedy z n prvkov s opakovaním nazývame usporiadané k -tice vytvorené z n prvkov, pričom sa prvky v k -tici môžu ľubovoľne opakovať.

Symbolicky variácie k -tej triedy z n prvkov s opakovaním označujeme ako $V'_k(n)$ a platí

$$V'_k(n) = n^k.$$

■ **Príklad 1.2** Koľko rôznych 3-ciferných čísel môžeme vytvoriť z čísl 1, 2, 3, 4, 5, ak sa číslice môžu opakovať.

Jedná o trojice z päť prvkov s opakovaním, tj. $k = 3$ a $n = 5$.

$$V'_3(5) = 5^3 = 125.$$

■

1.3 Permutácie bez opakovania

Definícia 1.3.1 Permutácie z n prvkov bez opakovania nazývame usporiadané n -tice vytvorené z n -prvkovej množiny.

Symbolicky permutácie z n prvkov bez opakovania označujeme ako $P(n)$ a platí

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!.$$

R Permutácie z n prvkov bez opakovania sú v podstate variáciami n -tej triedy z n prvkov

$$P(n) = V_n(n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

■ **Príklad 1.3** Vytvorme všetky permutácie z prvkov a, b, c .

abc, acb, bac, cab, cba .

Pre kontrolu si overíme, či ich je skutočne šesť,

$$P(3) = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

■

1.4 Permutácie s opakovaním

Definícia 1.4.1 Permutácie z n prvkov, kde sa 1. prvok opakuje r_1 -krát, 2. prvok r_2 -krát až k -ty prvok sa opakuje r_k -krát, nazývame permutácie z n prvkov s opakovaním.

Symbolicky tieto permutácie s opakovaním označujeme a platí pre ne

$$P'_{r_1, r_2, \dots, r_k}(n) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}.$$

■ **Príklad 1.4** Koľko rôznymi spôsobmi môžeme vedľa seba rozostaviť tri zelené, dva červené a dva modré hrnčeky (guličky, stoličky, vázičky alebo mamičky)?

Bez dlhšieho rozmýšľania

$$P'_{3,2,2}(7) = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{5040}{6 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5040}{24} = 210.$$

■

Teraz si dovoľme jeden motivujúci príklad. Často sa stáva, že veci ktoré sa na prvý pohľad javia byť zrejmy, majú presne opačné vlastnosti ako sme očakávali. A aby sa vzdelaní mali aj čomu čudovať, nazývajú takúto situáciu paradoxom.

■ **Príklad 1.5** Profesor na prednáške ponúka náhodne sa zúčastniť 57 účastníkom takúto stávkku: "Ak ste sa všetci narodili v rôzne dni roka, vyplatím každému z Vás 100 euro. Ak to nie je pravda, tj. ak čo len dvaja máte narodeniny v ten istý deň, dostanem od každého z Vás 1 euro.". Vypočítajme pravdepodobnosť profesorovej výhry (pre jednoduchosť predpokladajme, že všetci účastníci sa narodili v roku, ktorý nie je priestupný).

Počet možností, koľkými možno vybrať n dní roka (predstavme si, že n -krát po sebe si v kalendári náhodne vyberieme jeden deň, pričom jednotlivé výbery sú na sebe nezávislé) je 365^n .

Určenie počtu možností ako vybrať n dní roka tak, aby boli každé dva rôzne, možno realizovať postupným výberom z urny, do ktorej sme vložili čísla od 1 do 365. Prvé číslo vyberáme z 365 možností, druhé nezávisle na prvom už len z 364 možností, atď. takže možností ako vybrať n dní roka, pričom každé 2 dni sú rôzne, je :

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots = 365 \cdot (365 - 1) \cdot (365 - 2) \cdot \dots \cdot (365 - (n - 1)).$$

Pravdepodobnosť, že pán profesor prehrá, tj. že každý dvaja účastníci sa narodili v rôzne dni preto je:

$$P_n(\text{prehry}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot (365 - (n - 1))}{365^n} = \frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n}.$$

pravdepodobnosť výhry profesora spočítame jednoducho: $P_n(\text{výhry}) = 1 - P_n(\text{prehry})$. Pre $n = 57$ máme

$$P_{57}(\text{výhry}) = 1 - P_{57}(\text{prehry}) = 1 - \frac{365!}{(365 - 57)! \cdot 365^{57}} = 0.99012 \doteq 99\%.$$

■

1.5 Kombinačné čísla

V tejto časti uvedieme definíciu kombinačného čísla a niekoľko vzťahov pre jeho výpočet, ako aj definíciu zovšeobecneného kombinačného čísla.

Definícia 1.5.1 Kombinačné číslo (n nad k) rozumieme symbol $\binom{n}{k}$, ktorý je definovaný vzťahom

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! \cdot k!}.$$

Priamo z definície je ľahké odvodiť vzťahy pre počítanie s kombinačnými číslami:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k},$
2. $\binom{n}{1} = n,$
3. $\binom{n}{0} = 1,$ odkiaľ dostávame ďalšie dva vzťahy $\binom{n}{n} = 1$ a $\binom{0}{0} = 1,$
4. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k + 1} = \binom{n + 1}{k + 1}.$

V dnešnej dobe je väčšina kalkulačiek vybavená funkciou na výpočet kombinačných čísel, ale v minulosti sa pre ich výpočet používali rôzne pomôcky ako bol aj tzv. Pascalov trojuholník¹. Ide o trojuholníkovú

¹ Blaise Pascal, (*19. 6. 1623 – †19. 8., 1662) bol francúzsky matematik, fyzik a náboženský filozof.

schému, kde v každom riadku je o jeden člen viac ako v predchádzajúcom a zároveň je súčet dvoch susedných čísel rovný číslu pod nimi, pričom v hornom vrchole trojuholníka je jednotka. Schéma vyzerá nasledovne:

				1						0.
				1		1				1.
			1		2		1			2.
		1		3		3		1		3.
	1		4		6		4		1	4.
	1	5		10		10		5	1	5.
1		6	15		20		15	6	1	6.
1	7	21	35		35	21	7	1		7.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.			

Ak si vezmeme ako príklad kombinačné číslo $\binom{7}{2}$, podľa prvého vzťahu vieme, že bude určite rovné kombinačnému číslu $\binom{7}{5}$ a tiež, že bude rovné

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \binom{7}{5} = 21.$$

Toto číslo sa nachádza v Pascalovom trojuholníku práve v siedmom riadku v druhom resp. piatom stĺpci.

Pascalov trojuholník teda môžeme definovať ako schému, ktorú tvoria kombinačné čísla $\binom{n}{k}$ pre $n = 0, 1, 2, \dots$ a $0 \leq k \leq n$, tj.:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \dots & & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n}
 \end{array}$$

Teraz sa budeme zaoberať tzv. *zovšeobecneným kombinačným číslom*. Vieme, že platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!},$$

čo môžeme ďalej vyjadriť aj ako

$$\begin{aligned}
 \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)! \cdot k!} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \\
 &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-[k-1])}{k!},
 \end{aligned}$$

kde $n \geq 0$ a $0 \leq k \leq n$ sú celé čísla.

Zovšeobecnením definujeme kombinačné číslo pre všetky reálne čísla r a čísla $k \geq 0$, nasledovne

$$\binom{r}{k} = \frac{r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot (r-[k-1])}{k!},$$

$$\binom{r}{0} = 1.$$

Upozorníme ešte, že v čitateli predchádzajúceho zlomku je k činiteľov.

■ **Príklad 1.6** Vypočítajme $\binom{3.6}{5}$.

$$\binom{3.6}{5} = \frac{3.6 \cdot 2.6 \cdot 1.6 \cdot 0.6 \cdot (-0.4)}{5!} \doteq -0.03.$$

■

1.6 Kombinácie bez opakovania

Definícia 1.6.1 Kombinácie k -tej triedy z n prvkov bez opakovania nazývame ľubovoľné k -prvkové podmnožiny z n -prvkovej množiny, pričom sa žiadny prvok neopakuje, tj. z n prvkov vyberieme k prvkov, nezáleží na poradí, prvky sa neopakujú.

Označenie kombinácie k -tej triedy z n prvkov bez opakovania je $C_k(n)$ a vypočítame ich ako kombinačné číslo n nad k . Platí teda

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

■ **Príklad 1.7** Koľkými spôsobmi je možné vytvoriť trojčlennú delegáciu z desiatich ľudí?

$$C_3(10) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$$

■

1.7 Kombinácie s opakovaním

Definícia 1.7.1 Kombinácie k -tej triedy z n prvkov s opakovaním nazývame skupiny k prvkov z n prvkov, tj. z n prvkov vyberieme k prvkov, nezáleží na poradí, prvky sa môžu opakovať.

Označenie kombinácie k -tej triedy z n prvkov s opakovaním je $C'_k(n)$ a vypočítame ich ako

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

■ **Príklad 1.8** V trafike majú 9 druhov pohľadníc. Koľkými rôznymi spôsobmi si môže náhodná dôchodkyňa vybrať 14 kusovú sadu pohľadníc (asi zohľadňuje aj estetické aj cenové hľadisko)?

$$C'_{14}(9) = \binom{9+14-1}{14} = \binom{22}{14} = 319770.$$

■

■ **Príklad 1.9** Koľko rôznych výsledkov môžeme dostať pri súčasnom hode piatimi hracími kockami?

Sú to päťice z šesť prvkov, tj. $k = 5$ a $n = 6$,

$$C'_5(6) = \binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = 252.$$

■

R Radi by sme upozornili na niekoľko pomerne dôležitých faktov. V práve končiacej kapitole sme používali výrazy, ktorých zmysel bol každému dosť zřejmý. Ale pre istotu sme si dovolili upozorniť na ne ešte raz. Ide o výrazy ako usporiadaná k -tica, množina (resp. podmnožina) a skupina prvkov. Pojem usporiadaná k -tica si najlepšie predstavíme ako vektor, kde má každý prvok presné miesto v poradí.

$$\text{napr.: } (a; b; c) \neq (b; a; c) \neq (c; a; b).$$

Naproti tomu pri množine (resp. podmnožine) nám nezáleží na poradí v akom sú prvky tejto množiny usporiadané, podstatný je fakt, či sú alebo nie sú prvkami množiny (resp. podmnožiny).

$$\text{napr.: } \{a; b; c\} = \{b; a; c\} = \{c; a; b\} \neq \{a; b\}.$$

No a ak hovoríme o skupine prvkov, máme na mysli určitý súbor prvkov, kde sa môžu jednotlivé prvky vyskytovať aj viackrát.

$$\text{napr.: } \langle a; a; a; b; b; c \rangle = \langle b; b; c; a; a; a \rangle \neq \{a; c; a; b\}.$$

2. Teória pravdepodobnosti

Teória pravdepodobnosti predstavuje akýsi základ pre štatistiku. Je jej nedeliteľnou súčasťou. Pre hlbšie pochopenie štatistiky je potrebné mať znalosti minimálne na úrovni tejto kapitoly. Teória pravdepodobnosti popisuje náhodné javy a pravdepodobnosť ich nastania. Štatistika konkrétne modeluje empirické javy, pričom štatistické metódy, popisujúce tieto javy, majú základ práve v teórii pravdepodobnosti.

2.1 Náhodný jav

Definícia 2.1.1 *Náhodný pokus (dej)* je pokus, ktorého výsledok nie je jednoznačne určený podmienkami, pri ktorých sa uskutočňuje. Máme tým na mysli pokusy (aj keď sa lepšie hodí výraz dej), ktorých výsledok vopred nemožno určiť.

Napr.: hod mincou alebo hracou kockou, počet obetí po stredne silnom zemetrasení v Číne, atď..

Definícia 2.1.2 *Náhodný jav* je pravdivé tvrdenie o výsledku náhodného pokusu. Inak povedané výsledok pokusu.

Napr.: "Pri hode mincou padne symbol znak",
"Pri hode hracou kockou padne číslo päť",
"Pri stredne silnom zemetrasení v Číne zomrie 3624 osôb"

Náhodné javy budeme označovať veľkými písmenami, napr.
jav A : "Spartak Trnava získa ligový titul".

Z nášho pohľadu budú zaujímavé také pokusy, pri ktorých bude sledovaný jav, pri väčšom počte pokusov vykazovať určitú stabilitu. Čo v praxi znamená, že relatívna početnosť nastania náhodného javu A má pri väčšom počte pokusov tendenciu byť konštantná. Kde relatívna početnosť je vyjadrená ako pomer počtu nastania javu A ku počtu všetkých pokusov.

Teda nič iné ako

$$\frac{n_A}{n} \sim \text{konst.}, \text{ pre } n \gg 1,$$

kde n_A udáva koľkokrát nastal jav A a n udáva koľkokrát bol vykonaný pokus.

Túto konštantu budeme nazývať *pravdepodobnosťou náhodného javu* A . (Pre príklad uvedený vyššie sa táto pravdepodobnosť bude rovnáť pravdepodobnosti istého javu, ako si neskôr povieme.)

Pre názornosť uvažujme o hracej kocke so šiestimi stenami a náhodnom jave A , že "Pri hode hracou kockou padne číslo päť".

Ak by sme začali hracou kockou hádzať a výsledky by sme si zapisovali, po dostatočnom počte hodov by sme si všimli, že počet padnutia čísla päť a počet hodenia kockou sú v pomere približne 1 ku 6. Tento výsledok, by asi nikoho neprekvapil, nakoľko asi každý aj očakáva, že pravdepodobnosť, že "Pri hode hracou kockou padne číslo päť" je $\frac{1}{6} = 0.16667 \doteq 16.7\%$.

Na tomto mieste by sme chceli upozorniť čitateľa, aby vo zvýšenej miere venoval pozornosť názvosloviu teórie pravdepodobnosti, ktoré ako sa po rokoch javí, má tiež tendenciu zavádzať, a teda je dosť pravdepodobné, že sa čitateľ v problematike prestane orientovať, len z dôvodu nejasnosti, nejednotnosti a neprehľadnosti označenia.

2.1.1 Algebraické operácie a relácie s javmi

Nech A, B sú náhodné javy.

I. Relácia rovnosti $A = B$

Nastáva ak jav A je súčasťou javu B a súčasne jav B je súčasťou javu A .

Napr.: jav A : "Pri hode hracou kockou padne číslo šesť."

jav B : "Pri hode hracou kockou padne párne číslo deliteľné tromi."

II. Operácia zjednotenia $A \cup B$

Je náhodný jav, ktorý nastane práve vtedy, ak nastane jav A alebo jav B , tj. nastane aspoň jeden z javov A alebo B .

Napr.: jav A : "Pri hode hracou kockou padne číslo šesť."

jav B : "Pri hode hracou kockou padne číslo päť."

jav $A \cup B$: "Pri hode hracou kockou padne číslo päť alebo číslo šesť."

III. Operácia prieniku $A \cap B$

Je náhodný jav, ktorý nastane práve vtedy, ak nastane jav A a súčasne nastane jav B , tj. nastanú súčasne oba javy.

Napr.: jav A : "Pri hode hracou kockou padne číslo šesť."

jav B : "Pri hode hracou kockou padne číslo päť."

jav $A \cap B$: "Pri hode hracou kockou padne číslo päť a súčasne číslo šesť."

IV. Opačný jav $\bar{A}$

Opačný náhodný jav ku náhodnému javu A nastane vtedy, ak nenastane jav A .

Napr.: jav A : "Pri hode hracou kockou padne číslo šesť."

jav $\bar{A}$: "Pri hode hracou kockou nepadne číslo šesť, tj. padne jedno z čísel jedna, dva, tri, štyri alebo päť."

V. Istý jav Ω

Istý jav je náhodný jav, ktorý nastane vždy.

jav Ω : "Pri hode hracou kockou padne jedno z čísel jedna, dva, tri, štyri, päť alebo šesť."

Mohlo by sa ešte eventuálne stať, že nám kocka spadne na hranu ale tento prípad vylučujeme.

Zrejme platí $A \cup \bar{A} = \Omega$.

VI. Nemožný jav $\emptyset$

Nemožný jav je náhodný jav, ktorý nenastane nikdy.

Napr.: jav $\emptyset$: "Pri hode hracou kockou, kocka nespadne"

Nemožný jav je opačný jav ku istému javu $\bar{\Omega} = \emptyset$.

R Ak náhodné javy $A \cap B = \emptyset$, tj. ak tieto dva javy nikdy nenastanú súčasne, potom takéto javy nazývame *disjunktné (nezlučiteľné) náhodné javy*.

Napr.: jav $\emptyset$ Súčasné padnutie čísel dva a tri pri hode jednou hracou kockou.

R Javy môžeme aj porovnávať, ak $A \subset B$, potom hovoríme, že jav A je *podjavom* javu B .

Napr.: jav A "Pri hode hracou kockou padne číslo šesť."

jav B "Pri hode hracou kockou padne párne číslo."

2.2 Klasická definícia pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť by mala mať podobné vlastnosti ako relatívna početnosť $\frac{n_A}{n}$, nakoľko ju má modelovať. Pre ďalšie pochopenie je potrebné zaviesť niekoľko pojmov, ktoré sa budeme snažiť vysvetliť, čo najempirickejšie.

Jav, ktorý nie je možné ďalej rozložiť na podrobnejšie nazývame *elementárny jav*, napr. pri hode hracou kockou môžeme jav padnutia párneho čísla rozložiť na tri elementárne javy, a to: jav padnutia čísla dva, jav padnutia čísla štyri a jav padnutia čísla šesť, ktoré už ďalej rozložiť nemôžeme, teda sú to elementárne javy.

Definícia 2.2.1 Systém množín α nazývame *algebrou*, ak platí:

1. $\forall A, B \in \alpha$ platí, že aj $A \cup B \in \alpha$,
2. $\forall A, B \in \alpha$ platí, že aj $A \cap B \in \alpha$,
3. $\forall A \in \alpha$ platí, že aj $\bar{A} \in \alpha$
4. $\Omega \in \alpha$,
5. $\emptyset \in \alpha$.

Definícia 2.2.2 Reálnu funkciu $P(A)$ definovanú na algebre α podmnožín množiny Ω budeme nazývať *pravdepodobnosťou*, ak bude platiť nasledovné:

1. $\forall A \in \alpha \Rightarrow P(A) \geq 0$,
2. $\forall A, B \in \alpha$, také, že platí $A \cap B = \emptyset$ (tj. disjunktné) $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
3. $P(\Omega) = 1$,
4. $P(\emptyset) = 0$.

R Ak predpokladáme, že množina elementárnych javov Ω je konečná, a zároveň každý elementárny jav má navyše rovnakú pravdepodobnosť, dostávame špeciálny prípad, tzv. *klasickú definíciu pravdepodobnosti*.

Definícia 2.2.3 Nech Ω je konečná množina, a nech α je algebra podmnožín množiny elementárnych javov Ω .

Potom *pravdepodobnosťou* $P(A)$ množiny A rozumieme pomer

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

kde symbol $|A|$ znamená počet prvkov množiny A a symbol $|\Omega|$ znamená počet prvkov množiny Ω .

R Symbol $|A|$ môžeme interpretovať aj ako počet priaznivých výsledkov, tj. takých výsledkov pri ktorých jav A nastáva. Symbol $|\Omega|$ predstavuje zasa počet všetkých možných výsledkov pri náhodnom pokuse

R Trojicu (Ω, α, P) budeme nazývať *pravdepodobnostný priestor (klasický)*.

■ **Príklad 2.1** Hodíme hracou kockou. Vypočítajte aká je pravdepodobnosť, že padne číslo väčšie ako 2. $|A| = 4$, pretože $A = \{3, 4, 5, 6\}$.

$|\Omega| = 6$, pretože $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} \doteq 0.67 = 67\%.$$

■

■ **Príklad 2.2** Hodíme súčasne troma hracími kockami. Vypočítajte aká je pravdepodobnosť, že padnú tri rovnaké čísla.

$|A| = 6$.

$$|\Omega| = C'_3(6) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+3-1}{3} = 56.$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28} \doteq 0.107 = 10.7\%.$$

■

■ **Príklad 2.3** V škatuli je 20 výrobkov, z toho 7 je nepodarkov. Náhodne vyberieme 5 výrobkov. Vypočítame, aká je pravdepodobnosť, že práve 2 medzi vybranými výrobkami budú nepodarky.

$$|A| = C_2(7) \cdot C_3(13) = \binom{7}{2} \cdot \binom{13}{3} = 21 \cdot 286 = 6006.$$

A - medzi vybranými budú dva nepodarky (tj. $C_2(7) = \binom{7}{2}$) a zvyšné tri budú v poriadku (tj. $C_3(13) = \binom{13}{3}$).

$$|\Omega| = C_5(20) = \binom{20}{5} = 15\,504.$$

Ω - výber 5 z 20, pričom na poradí nezáleží.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6006}{15\,504} = \frac{1001}{2584} \doteq 0.387 = 38.7\%.$$

■

2.3 Kolmogorova definícia pravdepodobnosti

Tadeáš Nikolajevič Kolmogorov¹ v tridsiatich rokoch minulého storočia svojou definíciou pravdepodobnosti položil základy modernej teórie pravdepodobnosti, na ktorých stojí v podstate dodnes. Pravdepodobnosť pokladá za objektívnu vlastnosť náhodného javu, bez ohľadu na to či ju sme schopný zmerať, táto vlastnosť je vyjadrená číslom. Zvykom je označovať pravdepodobnosť náhodného javu ako $P(A)$. Výpočet pravdepodobnosti sa zakladá na troch základných axiómach, preto sa niekedy táto definícia nazýva aj *axiomatická definícia pravdepodobnosti*.

Základnou myšlienkou je, že množina elementárnych javov Ω je *nekonečná* a tiež že jednotlivé *elementárne javy nemajú rovnakú pravdepodobnosť*. V dôsledku toho je potrebné vykonať limitné úvahy o nekonečnej postupnosti náhodných javov. Vzhľadom na tieto skutočnosti rozšírime definíciu algebry na tzv. σ -algebru.

¹ Tadeáš Nikolajevič Kolmogorov (*25. 4., 1903 – †20. 10. 1987) sovietský matematik, zakladateľ modernej teórie pravdepodobnosti a teórie zložitosti algoritmov. Pracoval tiež v oblastiach topológie, logiky, Fourierových radov, turbulencie a klasickej mechaniky.

Definícia 2.3.1 Nech Ω je ľubovoľná neprázdna množina a α nech je neprázdny systém podmnožín množiny Ω .

Potom systém α nazveme σ -algebrou ak platí:

1. $\forall A \in \alpha \Rightarrow \bar{A} \in \alpha$.
2. $\forall A_i \in \alpha$, kde $i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \alpha$.

R Náhodným javom budeme rozumieť každú množinu α zo σ -algebry.

Definícia 2.3.2 (Kolmogorovova definícia pravdepodobnosti - I.)

Nech Ω je neprázdna množina a α nech je σ -algebra náhodných javov (podmnožín množiny Ω) definovaných na množine Ω .

Potom pravdepodobnosťou $P(A)$ javu $A \in \alpha$ je reálna funkcia definovaná na α , ktorá pre všetky disjunktné javy (tj. $\forall A_i, A_j \in \alpha$; kde $i, j = 1, 2, 3, \dots$ sú $A_i \cap A_j = \emptyset$, pre $i \neq j$) spĺňa nasledovné:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(A) \geq 0 \quad \forall A_j \in \alpha, j = 1, 2, \dots$,
3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Alebo inak.

Definícia 2.3.3 (Kolmogorovova definícia pravdepodobnosti - II.)

Množinu všetkých náhodných javov (výsledkov) určitého pokusu $A_1, A_2, \dots, A_m$ spolu s nemožným javom $\emptyset$ označme Ω .

Pravdepodobnosťou $P(A)$ náhodného javu nazývame reálnu funkciu definovanú na Ω a vyhovujúcu axiómam pravdepodobnosti:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A_j \in \Omega, j = 1, 2, \dots, m$,
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k, \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k), \dots$ pre ľubovoľnú (konečnú alebo nekonečnú) postupnosť navzájom disjunktných náhodných javov $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$

Na základe týchto axiém je jasné, že pravdepodobnosť má ďalšie vlastnosti:

R Pravdepodobnosť môže nadobúdať hodnoty od nula po jedna vrátane, tj. $0 \leq P(A) \leq 1$.

R Nemožný jav $\emptyset$ má nulovú pravdepodobnosť, tj. $P(\emptyset) = 0$.

R Pravdepodobnosť opačného javu je rovná doplnku pôvodného javu ku jednej, tj. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

R Ak je jav A súčasťou javu B (tj. A je podjavom javu $B, A \subset B$), potom je pravdepodobnosť javu A menšia nanajvýš rovná pravdepodobnosti javu B , tj. $P(A) \leq P(B)$.

R Ak je jav A súčasťou javu B (tj. A je podjavom javu $B, A \subset B$), potom je pravdepodobnosť rozdielu javov $B - A$ rovná rozdielu pravdepodobností oboch javov, tj. $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

2.4 Pravdepodobnosť zjednotenia náhodných javov

Pre pravdepodobnosť zjednotenia dvoch náhodných javov platí

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

ak by sme uvažovali n náhodných javov, potom by vzorec pre ich zjednotenie mal tvar

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

R Predošlý vzťah sa na prvý pohľad zdá nepochopiteľný, avšak pre konkrétne hodnoty n (najviac používanými sú hodnoty 2, 3 alebo 4) sa stane značne pochopiteľnejší

i)

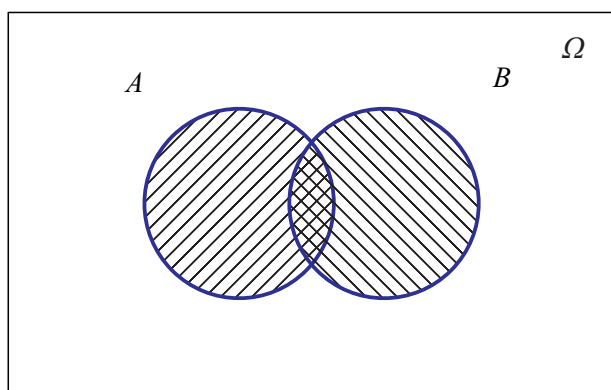
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C), \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C \cup D) &= P(A) + P(B) + P(C) + P(D) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) \\ &\quad - P(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

Dôsledok 2.4.1 Jasným vyústením je vzťah pre zjednotenie disjunktných javov, tj. ak $A_i \cap A_j = \emptyset$ pre $i \neq j$, potom platí

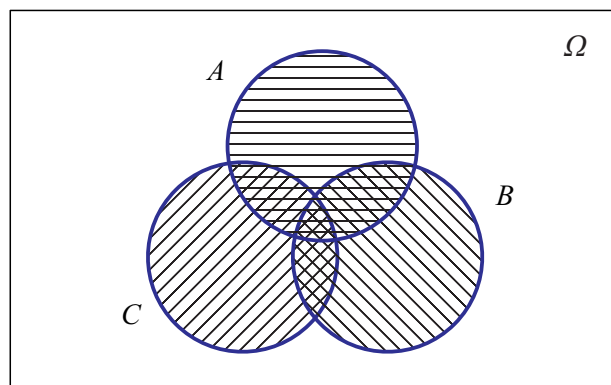
$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$



Obr. 2.4.1: Pravdepodobnosť zjednotenia dvoch náhodných javov

■ **Príklad 2.4** V zásielke je 20 čínskych mliečnych výrobkov, z ktorých 4 obsahujú melamín. Náhodne vyberieme 7 čínskych jogurtov. Vypočítajme pravdepodobnosť, že medzi vybranými kyslomliečnymi výrobkami je aspoň 5 bez obsahu melamínu.

A : "Medzi vybranými výrobkami je aspoň 5 bez obsahu melamínu."



Obr. 2.4.2: Pravdepodobnosť zjednotenia troch náhodných javov

A_1 : "Medzi vybranými je práve 5 bez obsahu melamínu."

A_2 : "Medzi vybranými je práve 6 bez obsahu melamínu."

A_3 : "Medzi vybranými je práve 7 bez obsahu melamínu."

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \dots$$

$$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{\binom{16}{5} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{20}{7}} = \frac{546}{1615} \doteq 0.338;$$

$$P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{\binom{16}{6} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{20}{7}} = \frac{2002}{4845} \doteq 0.413;$$

$$P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{\binom{16}{7} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{20}{7}} = \frac{143}{969} \doteq 0.148;$$

$$\dots = \frac{546}{1615} + \frac{2002}{4845} + \frac{143}{969} = \frac{871}{969} \doteq 0.899 = 90\%$$

■

■ **Príklad 2.5** V už nepoužívanom hokejovom štadióne metropoly východu bolo možné rozmiestniť maximálne tri televízne kamery, v prípade priameho televízneho prenosu z hokejového stretnutia. Tieto snímali nezávisle od seba. Pre prvú (centrálnu) kameru je pravdepodobnosť, že bude snímať v danom okamihu 60%, pre druhú a tretiu (pokrývajúce tretinu domácich resp. hostí) je táto pravdepodobnosť rovnaká, rovná 80%. Vypočítajme pravdepodobnosť, že bude snímať v danom okamihu dianie na ľadovej ploche aspoň jedna z kamier.

A : "Bude snímať aspoň jedna z kamier."

A_1 : "Bude snímať 1. kamera."

A_2 : "Bude snímať 2. kamera."

A_3 : "Bude snímať 3. kamera."

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dots$$

$$\left. \begin{aligned} P(A_1) &= 0.6, & P(A_2) &= 0.8, & P(A_3) &= 0.8, \\ P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48, \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1) \cdot P(A_3) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48, \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.8 \cdot 0.8 = 0.64, \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= 0.6 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.384. \end{aligned} \right\} \text{sú nezávislé!!!}^2$$

$$\dots = 0.6 + 0.8 + 0.8 - 0.48 - 0.48 - 0.64 + 0.384 = 0.984 = 98.4\%$$

■

2.5 Pravdepodobnosť opačného javu

Veta 2.5.1 Pre pravdepodobnosť opačného javu $\bar{A}$ ku javu A platí

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

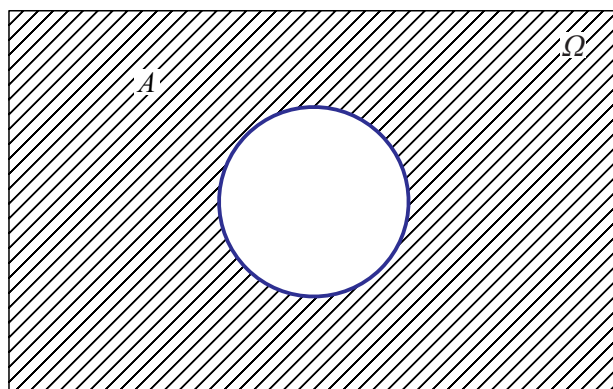
Dôkaz. Zrejme platí

$$\begin{aligned} \Omega &= A \cup \bar{A}, \\ P(\Omega) &= P(A \cup \bar{A}). \end{aligned}$$

Navzájom opačné javy sú disjunktné, a teda

$$\begin{aligned} 1 &= P(A) + P(\bar{A}), \\ P(\bar{A}) &= 1 - P(A). \end{aligned}$$

■



Obr. 2.5.1: Pravdepodobnosť opačného javu

²To, že sú javy nezávislé nám zaručuje, že na výpočet prieniku pravdepodobnosti používame hore uvedený vzťah. Pre podrobnejšie vysvetlenie viď kapitolu o pravdepodobnosti prieniku náhodných premenných resp. nezávislosti náhodných javov.

■ **Príklad 2.6** Zo sady 32 kariet vytiahneme 4 karty.

Vypočítajte aká je pravdepodobnosť, že medzi vytiahnutými kartami bude aspoň jedno eso (tj. 1 až 4).

A : "Medzi vytiahnutými kartami bude aspoň jedno eso."

$\bar{A}$: "Medzi vytiahnutými kartami nebude ani jedno eso."

$$P(\bar{A}) = \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{4}} \doteq 0.569,$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.569 \doteq 0.431 = 43.1\%.$$

■ **Príklad 2.7** Hodíme súčasne dvoma hracími kockami.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že nepadne súčet 12. [97.2%]

■ **Príklad 2.8** V osudí sú 2 biele, 3 čierne a 5 modrých žetónov. Náhodne vyberieme 3 žetóny.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že medzi nimi sú aspoň 2 žetóny rovnakej farby. [75%]

2.6 Podmienená pravdepodobnosť

Ak nie sú na výskyt javu A kladené žiadne podmienky, pravdepodobnosť $P(A)$ výskytu javu A nazývame *nepodmienená pravdepodobnosť*.

Často je však výskyt javu podmienený výskytom iného javu, tj. jav A sa môže vyskytnúť iba vtedy ak sa vyskytne jav B , ktorého pravdepodobnosť je $P(B) > 0$. V takomto prípade hovoríme o *podmienenej pravdepodobnosti*. Pojem podmienenej pravdepodobnosti $P(A | B)$ dvoch javov definuje nasledovný vzťah

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

■ **Príklad 2.9** Hodíme súčasne dvoma hracími kockami.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že padne súčet nanajvýš rovný 5, ak na prvej kocke padne čísla 2.

A : ... "Na prvej kocke padne čísla 2."

B : ... "Padne súčet nanajvýš rovný 5."

Pravdepodobnosť, že padne na prvej kocke číslo 2 je (na druhej kocke môže padnúť akékoľvek z šiestich čísel)

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Z celkového počtu 36 možných výsledkov vyhovujú vyznačené výsledky

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pravdepodobnosť, že padne súčet nanajvyš rovný 5 je

$$P(A) = \frac{10}{36}.$$

Z celkového počtu vyhovujú vyznačené výsledky

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pravdepodobnosť prieniku, že padne súčet nanajvyš rovný 5 a zároveň na prvej kocke padne číslo 2

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36},$$

čo reprezentujú vyznačené výsledky

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pravdepodobnosť, že padne súčet nanajvyš rovný 5, ak na prvej kocke padne čísla 2 je

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{3}{10} = 0.3.$$

■

2.7 Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Pre pravdepodobnosť prieniku náhodných javov $A_1, A_2, \dots, A_n$ platí

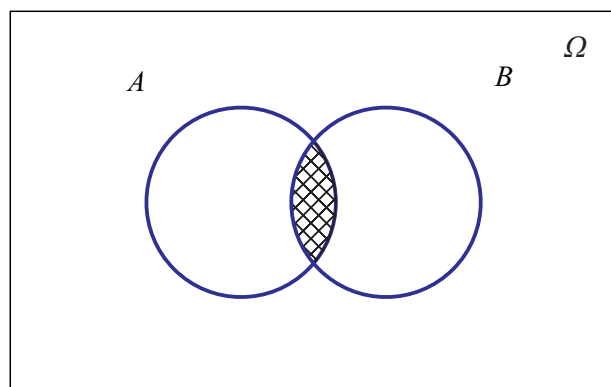
$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P\left(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

V špeciálnom prípade pre prienik dvoch javov A a B , tj. prípad ak tieto javy nastanú súčasne, platí, že pravdepodobnosť ich prieniku je rovná pravdepodobnosti jedného z javov krát podmienenej pravdepodobnosti druhého javu

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B).$$

Obdobne by sme mohli definovať pravdepodobnosť troch javov

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2).$$



Obr. 2.7.1: Pravdepodobnosť prieniku náhodných javov

Javy A a B budeme nazývať *nezávislé javy* ak výskyt javu A nezávisí na výskyte javu B a súčasne výskyt javu B nezávisí na výskyte javu A .

Vzhľadom k predošlému je zrejmé, že pre nezávislé javy A a B platí³

$$\begin{aligned} P(A | B) &= P(A), \\ P(B | A) &= P(B). \end{aligned}$$

Pre prienik nezávislých javov bude zrejme platiť nasledovný vzťah

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

■ **Príklad 2.10** V osudí sú 3 biele, 5 červených a 7 modrých guľičiek. Náhodne vyberieme 4 guľičky za sebou.

Vypočítajme aká je pravdepodobnosť, že 1. guľička bude biela, 2. červená, 3. červená a 4. modrá.

A : "1. biela, 2. červená, 3. červená, 4. modrá".

A_1 : "1. biela",

A_2 : "2. červená",

A_3 : "3. červená",

A_4 : "4. modrá".

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4.$$

Výskyt týchto javov je závislý na výsledku predošlého javu, a preto

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \dots$$

³Ešte raz však zdôraznime, že to platí výlučne v prípade, ak sú javy nezávislé.

$$\begin{aligned}
 P(A_1) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{15}{1}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0.2, \\
 P(A_2 | A_1) &= \frac{\binom{5}{1}}{\binom{14}{1}} = \frac{5}{14} \doteq 0.357, \\
 P(A_3 | A_1 \cap A_2) &= \frac{\binom{4}{1}}{\binom{13}{1}} = \frac{4}{13} \doteq 0.214, \\
 P(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \frac{\binom{7}{1}}{\binom{12}{1}} = \frac{7}{12} \doteq 0.583,
 \end{aligned}$$

$$\dots = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{78} \doteq 0.0128 = 1.3\%.$$

■ **Príklad 2.11** Robotník obsluhuje tri prístroje, ktoré pracujú nezávisle. Pravdepodobnosť, že stroj nebude potrebovať v priebehu jednej hodiny zásah sa rovná pri 1. stroji 90%, pri 2. stroji 80% a pri 3. stroji 85%.

Vypočítajte aká je pravdepodobnosť, že počas jednej hodiny nebude potrebovať robotníkov zásah ani jeden stroj.

A : "Počas jednej hodiny nebude potrebovať robotníkov zásah ani jeden stroj"

A_1 : "Počas jednej hodiny nebude potrebovať robotníkov zásah 1. stroj",

A_2 : "Počas jednej hodiny nebude potrebovať robotníkov zásah 2. stroj",

A_3 : "Počas jednej hodiny nebude potrebovať robotníkov zásah 3. stroj".

Stroje pracujú nezávisle, preto platí

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3,$$

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.85 \doteq 0.61 = 61\%.$$

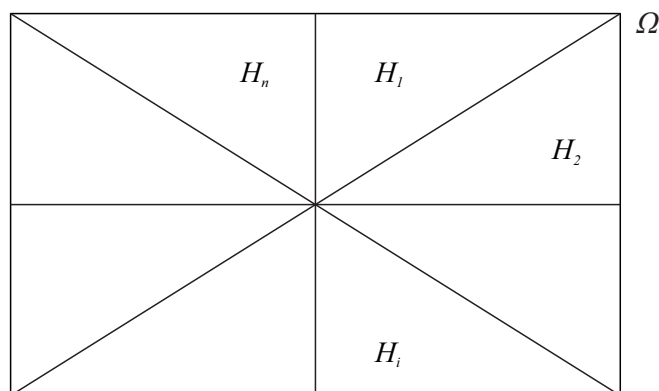
■ **Príklad 2.12** Máme tri zásielky určitého výrobku. Prvá zásielka obsahuje 8 dobrých a 3 vadné výrobky. Druhá zásielka obsahuje 10 dobrých a 5 vadných výrobkov. Tretie zásielka obsahuje 7 dobrých a 4 vadné výrobky. Z každej zásielky vyberieme (nezávisle na sebe) po jednom výrobku. Vypočítajte pravdepodobnosť, že všetky tri vybrané výrobky sú nezávadné. [30.8%] ■

■ **Príklad 2.13** V osudí sú 3 modré, 4 červené a 5 bielych guľičiek. Náhodne vyberieme 5 guľičiek po sebe (vyberáme po sebe a nevkladáme naspäť, a teda každý výber je závislý na predchádzajúcom). Vypočítajte pravdepodobnosť, že 1. guľička bude biela, 2. biela, 3. červená, 4. červená a 5. modrá. [0.758%] ■

2.8 Vzorec úplnej pravdepodobnosti

Najskôr definujeme pojem úplný systém javov.

Definícia 2.8.1 Úplný systém javov nazývame systém javov $H_1, H_2, \dots, H_n$, ktoré sú po dvoch disjunktné, tj. $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre $i \neq j$, a súčasne ich zjednotenie tvorí istý jav, tj. $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$.



Obr. 2.8.1: Úplný systém javov

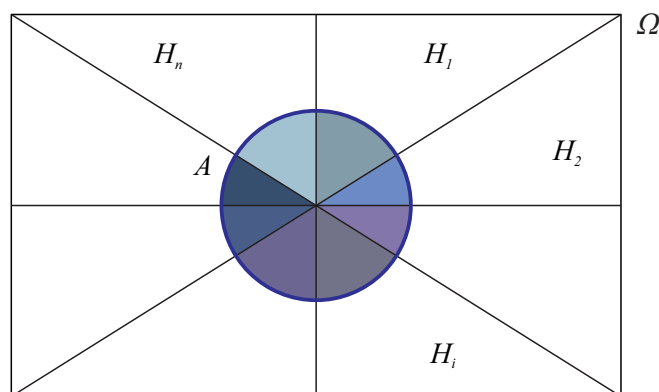
Dôsledok 2.8.1 Pokiaľ javy $H_1, H_2, \dots, H_n$ tvoria úplný systém javov, potom pravdepodobnosť ľubovoľného javu A určíme pomocou tzv. vzorca úplnej pravdepodobnosti

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i) \quad (\text{Vzorec úplnej pravdepodobnosti})$$

alebo tiež

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A | H_n).$$

Vzorec je jasným vyústením definície úplnej pravdepodobnosti, kedy ľubovoľný jav je v úplnom systéme javov rozložený na disjunktné časti, ktorých, nakoľko je systém úplný, zjednotenie nám dáva celý jav A .



Obr. 2.8.2: Vzorec úplnej pravdepodobnosti

R Vzorec úplnej pravdepodobnosti platí aj v prípade, že n nahradíme nekonečnom, tj. $n \rightarrow \infty$.

R Javy $H_1, H_2, \dots, H_n$ zvykneme nazývať *hypotézy* a platí pre ne

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Hypotézy sú teda navzájom nezlúčiteľné (disjunktné) javy, ktorých zjednotením je istý jav Ω .

■ **Príklad 2.14** Do predajne dodávajú tri výrobné podniky výrobky rovnakého druhu v zastúpení 2 : 3 : 4. Pravdepodobnosť bezchybného výrobku je z 1. podniku 82%, z 2. podniku 93% a z 3. podniku 90%.

Vypočítajte aká je pravdepodobnosť, že kúpime bezchybný výrobok.

A : "Kúpime bezchybný výrobok."

H_i : "Výrobok je z i -tého podniku."

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) + P(H_3) \cdot P(A | H_3) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot 0.82 + \frac{3}{9} \cdot 0.93 + \frac{4}{9} \cdot 0.9 = 0.892 = 89.2\% \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 2.15** Dve zásielky obsahujú výrobky. Prvá zásielka obsahuje 18 dobrých a 3 chybné. Druhá zásielka obsahuje 9 dobrých a 1 chybný. Z druhej zásielky vyberieme 1 výrobok a dáme ho do prvej. Potom náhodne vyberieme jeden výrobok z prvej zásielky.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že je tento dobrý.

A : "Výrobok je dobrý."

H_1 : "Výrobok je z druhej zásielky je chybný."

H_2 : "Výrobok je z druhej zásielky je dobrý."

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{22} + \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{22} = 85.9\%$$

■

■ **Príklad 2.16** Do osudia s tromi guľičkami sa vloží jedna biela guľička. Predpokladajme, že akýkoľvek počet bielych guľičiek v osudí je pravdepodobný. Potom z osudia vytiahneme jednu guľičku.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že je biela.

A : "Vybraná guľička je biela."

H_1 : "V pôvodnom osudí sú všetky tri guľičky biele."

H_2 : "V pôvodnom osudí sú dve guľičky biele."

H_3 : "V pôvodnom osudí je jedna guľička biela."

H_4 : "V pôvodnom osudí nie je žiadna guľička biela."

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A | H_1) + P(H_2) \cdot P(A | H_2) \\ &\quad + P(H_3) \cdot P(A | H_3) + P(H_4) \cdot P(A | H_4) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8} = 0.625 = 62.5\% \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 2.17** Tri závody vyrábajú žiarovky. Prvý z nich kryje 60% všetkej spotreby kraja, druhý kryje 25% a tretí 15%. Z každých 100 žiaroviek 1. závodu je 92 štandardných, z 2. závodu 78 a z 3. závodu je ich iba 63 štandardných.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že žiarovka kúpená v tomto kraji je štandardná. [84.1%]

■

■ **Príklad 2.18** Dve zásielky obsahujú výrobky. Prvá zásielka obsahuje 18 dobrých a 3 chybné. Druhá zásielka obsahuje 9 dobrých a 1 chybný. Z druhej zásielky vyberieme 2 výrobky a dáme ho do prvej. Potom náhodne vyberieme jeden výrobok z prvej zásielky.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že je tento dobrý. [86.1%]

■

2.9 Bayesov vzorec

Nech javy $H_1, H_2, \dots, H_n$ tvoria úplný systém javov. Pokiaľ je výsledkom náhodného pokusu jav A , potom podmienenú pravdepodobnosť javu H_j vzhľadom k javu A vypočítame použitím *Bayesovho vzorca*

$$P(H_j | A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A | H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A | H_j)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i)}.$$

R A je známy jav, ktorý nastáva pri náhodnom pokuse. Bayesov vzorec hovorí o pravdepodobnosti hypotézy za podmienky, že nastane jav A .

R Bayesov vzorec platí aj v prípade, že n nahradíme nekonečnom, tj. $n \rightarrow \infty$.

■ **Príklad 2.19** Poistovňa klasifikuje vodičov do troch kategórií, a to na A_1 - dobrý, A_2 - stredne dobrý a A_3 - zlý. Podľa skúseností vedia, že skupina A_1 tvorí približne 20% poistených, skupina A_2 30% a najpočetnejšou je skupina A_3 s 50%-ným zastúpením. Pravdepodobnosť, že vodič zo skupiny A_1 bude mať nehodu je 0.01, pre vodiča zo skupiny A_2 je táto možnosť 0.03, no a pre vodiča poslednej kategórie to je 0.1.

Poistovacia spoločnosť poistí pána Z, následne má pán Z nehodu, aká je pravdepodobnosť, že pán Z patrí do kategórie A_3 ?

A : "Má nehodu."

A_1 : "Patrí do A_1 ." $\implies P(A_1) = 0.2$,

A_2 : "Patrí do A_2 ." $\implies P(A_2) = 0.3$,

A_3 : "Patrí do A_3 ." $\implies P(A_3) = 0.5$.

$A_3 | A$: "Patrí do A_3 a má nehodu."

$$\begin{aligned} P(A_3 | A) &= \frac{P(A_3) \cdot P(A | A_3)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.2 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.5 \cdot 0.1} \\ &\doteq 0.82 = 82\% \end{aligned}$$

■ **Príklad 2.20** Závod vyrába určité súčiastky, ktorých kvalitu kontrolujú dvaja kontrolóri. Pravdepodobnosť, že súčiastka bude kontrolovaná prvým kvalifikátorom je 0.7, že druhým 0.3. Pravdepodobnosť, že súčiastku prvý kvalifikátor uzná za vyhovujúcu je 0.92, pri druhom je táto pravdepodobnosť 0.98. Pri výstupnej previerke sa zistilo, že je súčiastka vyhovujúca.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že ju kontroloval prvý kontrolór. [68.6%] ■

■ **Príklad 2.21** Skôr ako choroba Z prepukne jej existenciu je možné zistiť biologickým testom, ktorého výsledok však nie je úplne jednoznačný. Pri chorej osobe je pravdepodobnosť jej pozitívneho výsledku testu 0.999, naopak pri zdravej osobe sa pozitívny test objaví s pravdepodobnosťou 0.01. Test teda ochorenie nemusí zistiť. Predpokladáme, že choroba postihuje približne 10% populácie.

Osoba XY má pozitívny výsledok testu.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že má skutočne chorobu Z . [91.7%] ■

2.10 Bernoulliho vzorec

Bernoulliho⁴ vzorec (schéma) sa používa na výpočet pravdepodobnosti pri opakovanom pokuse.

Veta 2.10.1 Nech pravdepodobnosť realizácie javu A je v každom jednotlivom pokuse je tá istá a rovná p .

Potom pravdepodobnosť k -násobného výskytu javu A v n nezávislých pokusoch je daná Bernoulliho vzorcom

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

alebo, ak položíme $q = 1 - p$ (q je pravdepodobnosť opačného javu), potom

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

■ **Príklad 2.22** Vypočítajte pravdepodobnosť, že pri 5-násobnom pokuse padne číslo šesť práve 2-krát?

$$p = \frac{1}{6}, k = 2, n = 5.$$

$$\begin{aligned} P_2(5) &= \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \\ &= \binom{5}{2} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{125}{216} = \frac{625}{3888} \doteq 0.160 = 16\%. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 2.23** Podnik vyrába 70% produkcie I. triedy kvality.

Určite pravdepodobnosť, že v sérii 100 výrobkov počet výrobkov prvotriednej kvality je od 60 do 62.

$$\begin{aligned} P_{100}(60) + P_{100}(61) + P_{100}(62) &= \binom{100}{60} \cdot 0.7^{60} \cdot 0.3^{40} \\ &\quad + \binom{100}{61} \cdot 0.7^{61} \cdot 0.3^{39} + \binom{100}{62} \cdot 0.7^{62} \cdot 0.3^{38} \\ &\doteq 0.0085 + 0.0130 + 0.0191 = 0.0406 = 4.1\%. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 2.24** Dvaja rovnocenní súperi hrajú šach, pričom remízu ako výsledok vylučujeme.

Vypočítajte, či je väčšia pravdepodobnejšie vyhrať 3 partie z 5 partíí alebo 4 partie zo 7 partíí.

[31.25% > 27.344%]

■

⁴Daniel Bernoulli (* 8. 2. 1700 – † 17. 3. 1782) bol švajčiarsky matematik, fyzik a medik. Významne prispel v oblastiach teórie diferenciálneho počtu, matematických radov, štatistiky a pravdepodobnostného počtu a teoretickej mechaniky.

3. Náhodná premenná (veličina)

Niekedy je užitočné náhodný jav popísať pomocou niektorej jeho číselnej charakteristiky (napr. rozmeru, hmotnosti, počtu prvkov, miery, apod.), ktorú nazývame náhodná premenná (veličina).

Definícia 3.0.1 Pojmom *náhodná premenná (veličina)* označujeme premennú, ktorej hodnota je určená výsledkom náhodného pokusu. Opakovaním pokusu dochádza vplyvom náhodných dejov ku zmenám *náhodnej premennej (veličiny)* a jej hodnotu nemožno pred prevedením pokusu určiť, a preto je náhodná premenná (veličina) určená rozdelením pravdepodobnosti.

Náhodnú premenná (veličina) budeme označovať ξ ¹ a jej hodnoty malými arabskými písmenami napr. x , y , z apod..

R Niekedy je zvykom náhodné veličiny (premenne) označovať veľkými písmenami, napr. X , Y , Z a ich hodnoty príslušnými malými písmenami tj. x , y , z . Avšak nepozornosťou dochádza často k zámene veličiny s jej hodnotou (tj. veľké písmeno s malým), a preto sa v ďalšom budeme pridržať označenia ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 etc..

R Symbol $P(\xi = x)$ (resp. $P(\xi < x)$) bude znamenať pravdepodobnosť s akou náhodná veličina ξ nadobúda hodnotu x (resp. nadobúda hodnotu menšiu ako x).

3.1 Diskrétné rozdelenie pravdepodobnosti

Definícia 3.1.1 Hovoríme, že náhodná veličina ξ má diskrétné rozdelenie pravdepodobnosti, ak existuje konečná alebo spočítateľná množina reálnych čísel $\{x_1; x_2; x_3; \dots\}$ takých, že platí

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\xi_i = x_i) = 1.$$

¹ malé grécke písmeno "ksi"

- R** Spočítateľná množina má nanajvýš toľko prvkov ako množina prirodzených čísel.
- R** Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny je dané hodnotami a pravdepodobnosťami s ktorými tieto hodnoty nadobúda!

■ **Príklad 3.1** V osudí sú 2 biele a 3 červené guličky. Náhodne vyberieme 3 guličky. Určíme rozdelenie pravdepodobnosti počtu bielych guličiek v náhodnom výbere.

Náhodná veličina ξ predstavuje v tomto prípade počet bielych guličiek v náhodnom výbere, teda počet bielych guličiek pri výbere troch guličiek z osudia. Na to aby sme určili rozdelenie, ako sme už upozornili, okrem všetkých hodnôt náhodnej veličiny (zrejme môžu nastať tri prípady, a to že v náhodnom výbere budú dve, jedna alebo žiadna biela gulička) potrebujeme aj pravdepodobnosti s akými tieto výsledky pokusu môžu nastať.

pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobúda hodnotu $x = 0$:

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10},$$

pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobúda hodnotu $x = 1$:

$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10},$$

pravdepodobnosť, že náhodná premenná nadobúda hodnotu $x = 2$:

$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}.$$

Získané výsledky zapíšeme do tabuľky:

$x :$	0	1	2
$P(\xi = x) :$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

■

V predchádzajúcom príklade sme sa snažili čo najpodrobnejšie vysvetliť, čo predstavuje pojem rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej a ako ho môžeme prezentovať.

Všimnime si zároveň aj fakt, že suma jednotlivých pravdepodobností všetkých hodnôt náhodnej premennej je rovná číslu 1, tj. je rovná pravdepodobnosti úplného systému javov.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 P(\xi_i = x) &= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = 1. \end{aligned}$$

3.2 Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia 3.2.1 Nech náhodná premenná ξ je definovaná na pravdepodobnostnom priestore (Ω, α, P) . Potom reálnu funkciu

$$F(x) = P(\xi < x), \quad \text{pre } x \in (-\infty; \infty),$$

nazývame *distribučná funkcia náhodnej premennej*.

R Distribučná funkcia náhodnej premennej je funkcia

- i) neklesajúca,
- ii) zľava spojitá,
- iii) spĺňa

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

■ **Príklad 3.2** Hodíme tri krát mincou. Pre náhodnú premennú ξ , ktorá predstavuje počet padnutí mince znakovou stranou nahor, určíme rozdelenie pravdepodobnosti a následne distribučnú funkciu.

Rozdelenie pravdepodobnosti určíme obdobne ako v predošlom príklade použitím Bernoulliho vzorca. Výsledky sú zapísané v tabuľke, pod ktorou sú uvedené jednotlivé výpočty.

$x :$	0	1	2	3
$P(\xi = x) :$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P(\xi = 0) = P_3(0) = \binom{3}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^3 = \dots$$

pravdepodobnosť padnutia znaku je zrejme $p = 0.5 = \frac{1}{2}$

$$\dots = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},$$

$$P(\xi = 1) = P_3(1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8},$$

$$P(\xi = 2) = P_3(2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8},$$

$$P(\xi = 3) = P_3(3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}.$$

Distribučnú funkciu určíme na intervaloch vymedzenými hodnotami náhodnej premennej pre $x < 0$:

$$F(x) = P(\xi < 0) = 0,$$

pre $0 \leq x < 1$:

$$F(x) = P(\xi < 1) = P(\xi = 0) = \frac{1}{8},$$

pre $1 \leq x < 2$:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\xi < 2) = P[(\xi = 0) \cup (\xi = 1)] \\ &= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}, \end{aligned}$$

pre $2 \leq x < 3$:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(\xi < 3) = P[(\xi = 0) \cup (\xi = 1) \cup (\xi = 2)] \\ &= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}, \end{aligned}$$

pre $3 \leq x$:

$$\begin{aligned} F(x) &= P[(\xi = 0) \cup (\xi = 1) \cup (\xi = 2) \cup (\xi = 3)] \\ &= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1. \end{aligned}$$

Distribučnú funkciu teda môžeme zapísať ako

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x < 0, \\ \frac{1}{8}, & \text{pre } 0 \leq x < 1, \\ \frac{4}{8}, & \text{pre } 1 \leq x < 2, \\ \frac{7}{8}, & \text{pre } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{pre } 3 \leq x. \end{cases}$$

- **Príklad 3.3** Prevedieme dva nezávislé výstrely na určité sídlo extrémistického hnutia. Pravdepodobnosť zásahu je pri každom pokuse rovnaká a rovná pravdepodobnosti zásahu cieľa izraelskou armádou, tj. 0.3. Pre náhodnú premennú ξ , ktorá predstavuje počet úspešných zásahov odvodte
- a) rozdelenie pravdepodobnosti,
- b) distribučnú funkciu a načrtnite jej graf. ■

3.3 Hustota rozdelenia

Tak ako v prípade diskrétného rozdelenia je rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej ξ dané hodnotami, ktoré nadobúda a pravdepodobnosťami, s akými tieto nadobúda, tak v prípade *spojitého rozdelenia* je náhodná premenná daná tzv. *hustotou rozdelenia*.

Definícia 3.3.1 Hovoríme, že náhodná premenná ξ má *spojité rozdelenie*, ak existuje taká nezáporná funkcia $f(x)$, pre ktorú platí

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

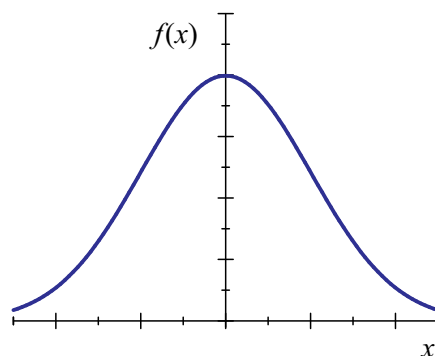
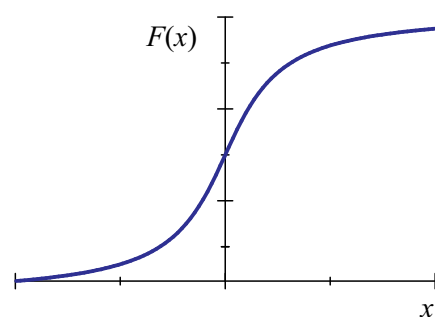
kde $F(x)$ predstavuje distribučnú funkciu prislúchajúcu náhodnej premennej ξ .

Funkciu $f(x)$ nazývame *hustota rozdelenia* pravdepodobnosti náhodnej premennej ξ .

- R** Predchádzajúci vzťah jednoznačne určuje hustotu rozdelenia. V prípade, že je funkcia hustoty rozdelenia $f(x)$ všade spojitá, môžeme ju definovať aj vzťahom

$$f(x) = F'(x).$$

- R** Ak je hustota rozdelenia $f(x)$ všade spojitá funkcia, je aj distribučná funkcia $F(x)$ všade spojitá funkcia.

Obr. 3.3.1: Hustota rozdelenia spojitej náhodnej premennej ξ Obr. 3.3.2: Distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej ξ

3.3.1 Základné vlastnosti hustoty rozdelenia

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

odkiaľ priamo plynú dôležité vzťahy pre výpočet pravdepodobnosti náhodnej premennej, ktorá má spojité rozdelenie

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

$$P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

$$P(a < \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

$$P(a \leq \xi \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Predošlé vzťahy sú dôsledkom vlastností určitého integrálu, a teda pre výpočet určitého integrálu nám na hraničných bodoch nezáleží, a preto je jedno, či vo vzťahoch použijeme ostrú alebo neostrú nerovnosť.

Veta 3.3.1 Aby funkcia $f(x)$ bola hustotou rozdelenia spojitej premennej, musí spĺňať

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

R Tento vzťah je akýmsi ekvivalentom vzťahu $\sum_{i=1}^{\infty} P(\xi_i = x) = 1$, pri diskretnom rozdelení náhodnej premennej.

Pri grafickom znázornení, je teda plocha medzi osou x -ovou a funkciou hustoty rovná 1.

Pri výpočte pravdepodobnosti, že náhodná premenná sa bude nachádzať v intervale napr. $\langle -1; 2 \rangle$, by sme počítali určitý integrál

$$P(-1 \leq \xi \leq 2) = \int_{-1}^2 f(x) dx,$$

ktorého výsledkom by bol rozdiel hodnôt distribučnej funkcie, tj.

$$P(-1 \leq \xi \leq 2) = \int_{-1}^2 f(x) dx = F(2) - F(-1).$$

■ **Príklad 3.4** Určíme konštantu c tak, aby funkcia $f(x)$ bola hustotou rozdelenia náhodnej premennej ξ , následne vypočítajme pravdepodobnosť, že náhodná premenná ξ bude nadobúdať hodnoty z intervalu $\langle -1; 1 \rangle$, tj. vypočítajme $P(-1 \leq \xi \leq 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 \cdot e^{-x^3}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Musí platiť $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} cx^2 \cdot e^{-x^3} dx = c \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx = \left/ \begin{array}{l} t = x^3 \\ 0 \rightarrow 0 \\ \infty \rightarrow \infty \end{array} \right/ \\ &= \frac{c}{3} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{c}{3} [-e^{-t}]_0^{\infty} = \frac{c}{3} [0 + e^0]_0^{\infty} = \frac{c}{3}, \end{aligned}$$

a preto

$$\frac{c}{3} = 1,$$

odkiaľ teda platí

$$c = 3.$$

Hustota rozdelenia bude mať teda tvar

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \cdot e^{-x^3}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Pravdepodobnosť $P(-1 \leq \xi \leq 1)$ vypočítame nasledovne

$$\begin{aligned} P(-1 \leq \xi \leq 1) &= \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 3x^2 \cdot e^{-x^3} dx = [-e^{-1} + e^0] = -\frac{1}{e} + 1 \doteq 0.632 = 63.2\%. \end{aligned}$$

■

3.4 Číselné charakteristiky náhodnej premennej

Distribučná funkcia, rozdelenia pravdepodobnosti a hustota pravdepodobnosti popisujú najpresnejšie pravdepodobnosť správania sa náhodnej premennej. V praxi sa často používajú na popis niektorých charakteristických vlastností náhodnej premennej *číselné charakteristiky*.

3.4.1 Stredná hodnota

Stredná hodnota náhodnej premennej je akousi *charakteristikou polohy*. Môžeme ju chápať ako *stred* rozdelenia pravdepodobnosti, okolo ktorého sa sústreďujú všetky hodnoty náhodnej premennej ξ . Označujeme ju $E(\xi)$ alebo μ .

Stredná hodnota je pre:

1. diskretnú náhodnú premennú ξ a jej pravdepodobnostnú funkciu² p_i definovaná ako

$$E(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i,$$

2. spojitú náhodnú premennú ξ a jej hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ definovaná ako

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Vlastnosti strednej hodnoty

- i) $E(c) = c$, kde c je konštanta,
- ii) $E(a \cdot \xi + b) = a \cdot E(\xi) + b$, kde a, b sú konštanty,
- iii) $E(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = E(\xi_1) + E(\xi_2) + \dots + E(\xi_n)$,
- iv) $E(\xi_1 \cdot \xi_2) = E(\xi_1) \cdot E(\xi_2)$, ak sú náhodné veličiny ξ_1, ξ_2 nezávislé.

■ **Príklad 3.5** Náhodná premenná má rozdelenie dané tabuľkou

$\xi :$	-1	0	1	2	3
$p_i :$	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

Určíme strednú hodnotu $E(\xi)$.

$$E(\xi) = -1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.1 = 1.2.$$

■

² $p_i = P(\xi = x_i)$

■ **Príklad 3.6** Hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sin x & 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{všade inde.} \end{cases}$$

Určíme strednú hodnotu $E(\xi)$.

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx = \dots = \frac{\pi}{2}.$$

■

3.4.2 Rozptyl (disperzia) a smerodajná odchýlka

Variabilita rozdelenia vyjadruje premenlivosť jednotlivých hodnôt náhodnej premennej, ich kolísanie okolo nejakej konštanty. Najmä nás bude zaujímať ako sa tieto hodnoty rozptyľujú okolo strednej hodnoty. Najčastejším vyjadrením tejto variability je *rozptyl (disperzia)*, ktoré budeme označovať $D(\xi)$ alebo σ^2 .

Rozptyl (disperzia)

Všeobecne môžeme rozptyl vyjadriť vzťahom

$$D(\xi) = E([\xi - E(\xi)]^2),$$

a pomocou vlastností strednej hodnoty upraviť na tvar

$$D(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2.$$

Rozptyl (disperzia) pre:

1. diskretnú náhodnú premennú ξ a jej pravdepodobnostnú funkciu $p_i = P(\xi = x_i)$ je definovaný ako

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^n [x_i - E(\xi)]^2 \cdot p_i,$$

2. spojitú náhodnú premennú ξ a jej hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ je definovaný ako

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(\xi)]^2 f(x) dx.$$

Vlastnosti rozptylu (disperzie)

- i) $D(c) = 0$, kde c je konštanta,
- ii) $D(a \cdot \xi + b) = a^2 \cdot D(\xi)$, kde a, b sú konštanty,
- iii) Nech sú náhodné veličiny $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ nezávislé, potom platí

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots + D(\xi_n),$$

$$D(\xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + \dots + D(\xi_n).$$

Smerodajná odchýlka

Ďalšou charakteristikou variability je *smerodajná odchýlka* σ , ktorá je definovaná práve pomocou rozptylu

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)} \quad \text{alebo} \quad \sigma^2 = D(\xi).$$

■ **Príklad 3.7** Náhodná premenná má rozdelenie dané tabuľkou

$\xi :$	-1	0	1	2	3
$p_i :$	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

Určíme rozptyl $D(\xi)$ a smerodajnú odchýlku σ .

$$D(\xi) = (-1 - 1.2)^2 \cdot 0.1 + (0 - 1.2)^2 \cdot 0.2 + (1 - 1.2)^2 \cdot 0.2 + (2 - 1.2)^2 \cdot 0.4 + (3 - 1.2)^2 \cdot 0.1 = 1.4.$$

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{1.4} = 1.1832.$$

■

■ **Príklad 3.8** Hustota rozdelenia náhodnej premennej ξ je

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{všade inde.} \end{cases}$$

Určíme rozptyl $D(\xi)$ a smerodajnú odchýlku σ , ak strednú hodnotu položíme rovnú číslu $E(\xi) = a$.

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \cdot f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-a)^2 \cdot \sin x dx = \dots = a^2 - 2a + \pi - 2.$$

■

3.4.3 Všeobecné momenty

Všeobecným momentom k -tého rádu ($k \geq 1$) náhodnej premennej ξ je číslo

$$m_k = E(\xi^k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i, & \text{ak má } \xi \text{ diskrétné rozdelenie,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx, & \text{ak má } \xi \text{ spojité rozdelenie.} \end{cases}$$

ale iba v prípade, ak rad resp. integrál konvergujú.

R Všeobecný moment prvého rádu je stredná hodnota, tj. $m_1 = E(\xi)$.

3.4.4 Centrálny moment

Centrálnym momentom k -tého rádu ($k \geq 2$) náhodnej premennej ξ je číslo

$$\mu_k = E[(\xi - m_1)^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n [x_i - E(\xi)]^k \cdot p_i, & \text{ak má } \xi \text{ diskrétné rozdelenie,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(\xi)]^k f(x) dx, & \text{ak má } \xi \text{ spojité rozdelenie,} \end{cases}$$

ale iba v prípade, ak rad resp. integrál konvergujú.

R Centrálnym momentom druhého rádu je rozptyl, tj. $\mu_2 = D(\xi)$.

3.4.5 Vzťah medzi $D(\xi)$, m_1 a m_2

Medzi všeobecnými momentmi existuje vzťah, ktorý sa niekedy používa na výpočet rozptylu

$$\begin{aligned} D(\xi) &= E[(\xi - m_1)^2] \\ &= E(\xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot m_1 + m_1^2) \\ &= E(\xi^2) + E(-2 \cdot \xi \cdot m_1) + E(m_1^2) \\ &= m_2 - 2m_1 \cdot E(\xi) + m_1^2 \\ &= m_2 - 2m_1 \cdot m_1 + m_1^2 \\ &= m_2 - 2m_1^2 + m_1^2 \\ &= m_2 - m_1^2. \end{aligned}$$

4. Diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti

Uvedieme niekoľko príkladov diskrétnych rozdelení náhodnej premennej a ich vlastnosti.

4.1 Binomické rozdelenie

Pri n -násobnom opakovaní náhodného pokusu sledujeme, koľkokrát nastal jav A ($P(A) = p$), poprípade koľkokrát nenastal ($P(\bar{A}) = 1 - p$).

parametre:	n, p
pravdepodobnostná funkcia:	$P(\xi = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = np$
rozptyl:	$D(\xi) = np(1 - p)$

■ **Príklad 4.1** Výrobný podnik vyexpedoval zásielku, ktorá mala 20 výrobkov. Pravdepodobnosť, že sa výrobok poškodí je 0.1. Vypočítajme

- pravdepodobnosť, že sa poškodia počas prepravy práve 4 výrobky,
- pravdepodobnosť, že sa poškodia počas prepravy najviac 4 výrobky,
- strednú hodnotu a rozptyl počtu poškodených výrobkov počas prepravy.

Parametre rozdelenia sú $n = 20, p = 0.1$.

a)

$$P(\xi = 4) = \binom{20}{4} \cdot 0.1^4 \cdot 0.9^{16} \doteq 0.09 = 9\%,$$

b)

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 4) &= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) \\ &= \binom{20}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^{18} \\ &\quad + \binom{20}{3} \cdot 0.1^3 \cdot 0.9^{17} + \binom{20}{4} \cdot 0.1^4 \cdot 0.9^{16} \\ &\doteq 0.957 = 95.7\%, \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} E(\xi) &= np = 20 \cdot 0.1 = 2, \\ D(\xi) &= np(1-p) = 20 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 1.8. \end{aligned}$$

■

4.2 Poissonovo rozdelenie

Ak pravdepodobnosť výskytu javu v jednom pokuse je veľmi malá $p \rightarrow 0$ (obvykle $p \leq 0.1$) a zároveň počet pokusov je veľký $n \rightarrow \infty$ (zväčša pre $n \geq 30$) použijeme namiesto binomického rozdelenia Poissonovo¹ rozdelenie. Parametre n a p nahradzame parametrom λ , pre ktorý platí $\lambda = np$. Poissonovo rozdelenie sa používa v teórii hromadnej obsluhy (náhodný jav predstavujúci príchod zákazníka, volajúci do telefónnej ústredne, atď.).

parameter:	λ
pravdepodobnostná funkcia:	$P(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \lambda$
rozptyl:	$D(\xi) = \lambda$

Rozdelenie popisuje správanie sa javov, ktoré majú malú pravdepodobnosť výskytu aj v rozsiahlych súboroch pozorovania.

■ **Príklad 4.2** Na málo frekventovanú telefónnu ústredňu prichádza za hodinu v priemere 7 výziev, tj. stredná hodnota počtu výziev je 7 za hodinu.

Určme pravdepodobnosť, že v priebehu 5 minút prídu

- a) práve 4 výzvy,
- b) aspoň 2 výzvy.

Nech náhodná premenná ξ_1 predstavuje počet výziev za hodinu so strednou hodnotou $E(\xi_1) = 7$, potom náhodná premenná ξ_2 predstavujúca počet výziev za 5 minút bude mať strednú hodnotu $E(\xi_2) = \frac{7}{12} = \lambda$ a bude mať tiež Poissonovo rozdelenie.

a)

$$P(\xi_2 = 4) = \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = \frac{\left(\frac{7}{12}\right)^4}{4!} e^{-\frac{7}{12}} = \frac{2401}{497664} \cdot e^{-\frac{7}{12}} \doteq 0.0027 = 0.27\%,$$

b)

$$\begin{aligned} P(\xi_2 \geq 2) &= 1 - P(\xi_2 < 2) = 1 - P[(\xi_2 = 0) \cup (\xi_2 = 1)] \\ &= 1 - (P(\xi_2 = 0) + P(\xi_2 = 1)) = 1 - \frac{\left(\frac{7}{12}\right)^0}{0!} \cdot e^{-\frac{7}{12}} - \frac{\left(\frac{7}{12}\right)^1}{1!} \cdot e^{-\frac{7}{12}} \\ &= 1 - \frac{19}{12} \cdot e^{-\frac{7}{12}} = 0.11644 \doteq 11.6\%. \end{aligned}$$

■

¹Simeon Denis Poisson (* 21. 6. 1781 - † 25. 4. 1840) bol francúzsky fyzik a matematik. Aplikoval matematickú teóriu potenciálov na problematiku elektrostatiky a magnetizmu.

5. Spojité rozdelenia pravdepodobnosti

5.1 Rovnomerné rozdelenie

Rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti majú náhodné veličiny, ktoré majú rovnakú možnosť nadobúdať ktorúkoľvek hodnotu z nejakého intervalu konečnej dĺžky $\langle a; b \rangle$ (hustota pravdepodobnosti je konštantná na celom intervale hodnôt), napr.: zaokrúhľovacia chyba alebo doba čakania na uskutočnenie javu, ktorý sa v pravidelných intervaloch opakuje.

parametre:	a, b
hustota rozdelenia:	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x \notin (a, b) \\ \frac{1}{b-a}, & \text{pre } x \in (a, b), \end{cases}$
distribučná funkcia:	$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \geq b \end{cases}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \frac{a+b}{2}$
rozptyl:	$D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$

■ **Príklad 5.1** Pri telefonovaní uplynie medzi vytočením poslednej číslice volaného čísla a spojením hovoru určitá doba, ktorú môžeme považovať, za náhodnú premennú s rovnomerným rozdelením na intervale $\langle 3; 53 \rangle$ sekúnd.

Vypočítajme pravdepodobnosť, že

- na spojenie budeme čakať aspoň 20 sekúnd,
- na spojenie budeme čakať v intervale $\langle 10; 30 \rangle$,
- vypočítajme strednú dobu čakania.

a)

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 20) &= P(20 \leq \xi \leq \infty) = F(53) - F(20) \\ &= \frac{53-3}{53-3} - \frac{20-3}{53-3} = \frac{33}{50} = 0.66 = 66\%, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(10 \leq \xi \leq 30) &= F(30) - F(10) = \frac{30-3}{53-3} - \frac{10-3}{53-3} \\ &= \frac{2}{5} = 0.4 = 40\%, \end{aligned}$$

c)

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2} = \frac{3+53}{2} = 28.$$

■

5.2 Normálne rozdelenie (Laplace-Gaussovo rozdelenie)

Normálne rozdelenie (Laplace-Gaussovo rozdelenie)¹² používame všade tam, kde kolísanie náhodnej veličiny je spôsobené súčtom veľkého počtu malých a navzájom nezávislých vplyvov, napr. pri sériovej výrobe ovplyvňuje rozmery výrobku kolísajúca kvalita surovín, nerovnomernosť strojového spracovania, rôzna pozornosť pracovníka a pod..

parametre:	μ, σ^2
hustota rozdelenia:	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ pre } x \in (-\infty, \infty)$
distribučná funkcia:	$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \text{ pre } t \in (-\infty, \infty)$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \mu$
rozptyl:	$D(\xi) = \sigma^2$

Skutočnosť, že náhodná veličina ξ má normálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou μ a smerodajnou odchýlkou $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{\sigma^2}$ zapisujeme $\xi \sim N(\mu; \sigma^2)$. (Všimnime si fakt, ktorý býva často pri riešení úloh opomínaný, a to, že v zápise $N(\mu, \sigma^2)$ vystupuje druhá mocnina smerodajnej odchýlky σ^2 , resp. rozptyl $D(\xi)$!!!)

Grafom hustoty normálneho rozdelenia je *Gaussova krivka*. Stredná hodnota reprezentuje umiestnenie vrcholu Gaussovej krivky a disperzia udáva mieru rozptylu (čo nie je nič iné len to, že čím bude rozptyl väčší, tým bude krivka viac rozšírená, a naopak)



Pre normálne rozdelenie platí tzv. *pravidlo troch sigma*, ktoré hovorí o tom, že v intervale $\langle \mu - 3 \cdot \sigma; \mu + 3 \cdot \sigma \rangle$ sa nachádza 99.7% všetkých hodnôt, tj.

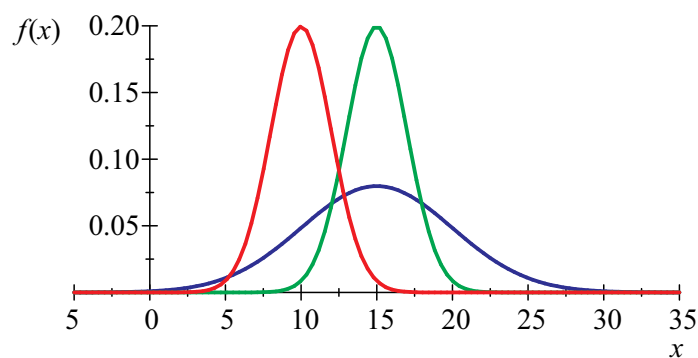
$$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq \xi \leq \mu + 3 \cdot \sigma) = 0.997 = 99.7\%.$$

5.3 Normálne normované rozdelenie

V prípade, že parametre μ a σ normálneho rozdelenia sú rovné $\mu = 0$ a $\sigma = 1$, hovoríme, že náhodná premenná ξ má normálne rozdelenie pravdepodobnosti v normovanom tvare, tj. má *normované normálne rozdelenie* pravdepodobnosti (v niektorých literatúrach pre zmenu uvádzajú aj Cauchyho rozdelenie).

¹ Pierre Simon de Laplace (* 23. 3. 1749 – † 5. 3. 1827) bol francúzsky matematik, fyzik, astronóm a politik. Zaoberal sa matematickou analýzou, teóriou pravdepodobnosti a nebeskou mechanikou.

² (Johann) Carl Friedrich Gauß (lat. forma mena Carolus Fridericus Gauss) (* 30. 4. 1777 – † 23. 2. 1855) bol jeden z najväčších matematikov a fyzikov všetkých čias. Zaoberal sa teóriou čísel, matematickou analýzou, geometriou, geodéziou, magnetizmom, astronómiou a optikou.

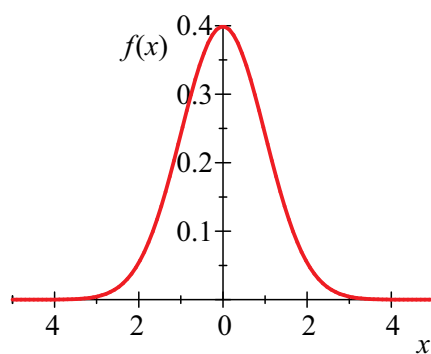
Obr. 5.2.1: Gaussova krivka hustoty normálneho rozdelenia (červená - $N(10;2)$, zelená - $N(15;2)$ a modrá - $N(15;5)$)

Skutočnosť, že náhodná premenná má normované normálne rozdelenie zapisujeme nasledovne $\xi \sim N(0;1)$.

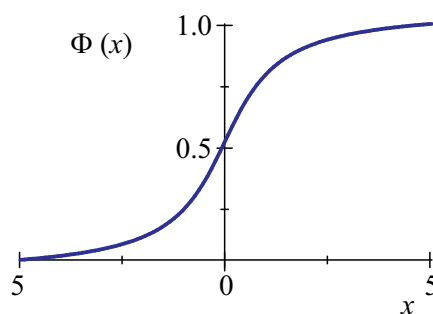
Pre normálne normované rozdelenie zrejme platí:

parametre:	$\mu = 0, \sigma^2 = 1$
hustota rozdelenia:	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ pre } x \in (-\infty, \infty)$
distribučná funkcia:	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ pre } t \in (-\infty, \infty)$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \mu = 0$
rozptyl:	$D(\xi) = \sigma^2 = 1$

Graf hustoty normovaného normálneho rozdelenia je Gaussova krivka sústredená okolo čísla nula.



Obr. 5.3.1: Graf hustoty normovaného normálneho rozdelenia

Obr. 5.3.2: Distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia $\Phi(x)$

Hodnoty integrálu

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

nie je možné určiť (integrál je neriešiteľný, lebo sa nedá vyjadriť pomocou elementárnych funkcií), a preto sa v praxi používajú približné hodnoty, vypočítané numerickými výpočtami. Tieto hodnoty sú uvedené v tabuľke v prílohe textu, kde sú pre jednotlivé pravdepodobnosti uvedené hodnoty náhodnej premennej $\xi \sim N(0; 1)$.

R Pre funkciu $\Phi(x)$ platí

$$\boxed{\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)} \quad \text{pre } x \in (-\infty; \infty).$$

■ **Príklad 5.2** Určíme hodnotu $\Phi(-1.18)$.

V tabuľke kvantilov distribučnej funkcie $\Phi(x)$ nie sú uvedené kvantily pre záporné hodnoty náhodnej premennej, využijeme preto predošlý vzťah

$$\Phi(-1.18) = 1 - \Phi(1.18) = 1 - 0.881 = 0.119.$$

■

5.3.1 Vzťah medzi $F(x)$ a $\Phi(x)$

Keďže sú tabelované iba hodnoty normálneho normovaného rozdelenia pri normálnom rozdelení musíme na zistenie hodnoty kvantilov použiť určitý prepočet, ktorý si teraz odvodíme

$$\begin{aligned} u &= \frac{t - \mu}{\sigma} \\ F(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \int_{-\infty \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow \frac{x-\mu}{\sigma}} du = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Platí teda

$$\boxed{F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}.$$

■ **Príklad 5.3** Náhodná premenná ξ má rozdelenie $N(0; 1)$. Určíme :

- $P(2 \leq \xi \leq 10)$,
- $P(\xi \geq 0)$.

a)

$$P(2 \leq \xi \leq 10) = \Phi(10) - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.023 = 2.3\%,$$

b)

$$P(\xi \geq 0) = P(0 \leq \xi < \infty) = \Phi(\infty) - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5 = 50\%.$$

■

■ **Príklad 5.4** Náhodná premenná ξ má rozdelenie $N(0.8; 4)$. Určime:

- a) $P(\xi \geq 1)$,
 b) $P(\xi \leq -1.16)$.

a)

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 1) &= P(1 \leq \xi < \infty) = F(\infty) - F(1) = 1 - \Phi\left(\frac{1-0.8}{2}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.1) = 1 - 0.54 = 46\%, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\xi \leq -1.16) &= P(-\infty < \xi \leq -1.16) = F(-1.16) - F(-\infty) \\ &= \Phi\left(\frac{-1.16-0.8}{2}\right) - 0 = \Phi(-0.98) = 1 - \Phi(-0.98) \\ &= 1 - 0.836 = 0.164. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 5.5** Hrúbku vyrábaných platní môžeme považovať za náhodnú premennú ξ . Predpokladáme, že ξ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $E(\xi) = 10$ mm a smerodajnou odchýlkou $\sigma = 0.02$ mm.

Určime aké percento môžeme očakávať, ak predpokladáme, že chybné sú

- a) platne tenšie 9.97 mm
 b) platne hrubšie 10.024 mm

a)

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 9.97) &= P(-\infty < \xi \leq 9.97) = F(9.97) - F(-\infty) \\ &= \Phi\left(\frac{9.97-10}{0.02}\right) - 0 = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) \\ &= 1 - 0.933 = 0.067 = 6.7\%, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\xi \geq 10.024) &= P(10.024 \leq \xi < \infty) = F(\infty) - F(10.024) = 1 - \Phi\left(\frac{10.024-10}{0.02}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.864 = 0.136 = 13.6\%. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 5.6** O miere inteligencie IQ vieme, že má normálne rozdelenie so strednou hodnotou IQ 90 a smerodajnou odchýlkou ± 15 bodov.

Vypočítajme pravdepodobnosť, že

- a) náhodný okoloidúci je debil, tj. miera IQ je u neho menšia alebo najvyšš rovná 60 bodov,
 b) náhodný spolusediaci má dostatok IQ na to, aby dokázal zvládnuť tento kurz, tj. miera IQ je u neho väčšia ako 80 bodov.

a)

$$\begin{aligned} P(\xi \leq 60) &= P(-\infty < \xi \leq 60) = F(60) - F(-\infty) \\ &= \Phi\left(\frac{60-90}{15}\right) - 0 = \Phi(-2) = 1 - 0.977 = 0.023 = 2.3\%, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 P(\xi \geq 80) &= P(80 \leq \xi < \infty) = F(\infty) - F(80) = 1 - \Phi\left(\frac{80 - 90}{15}\right) \\
 &= 1 - \Phi(-0.6\bar{6}) = 1 - (1 - \Phi(0.6\bar{6})) = 0.716 = 71.6\%.
 \end{aligned}$$

■

5.4 Gamma rozdelenie

Gama rozdelenie je vhodným modelom rozdelenia pre spojité náhodné veličiny, ktoré nadobúdajú len nezáporné hodnoty. $\Gamma(\alpha)$ sa nazýva *Eulerova³ gamma funkcia*.

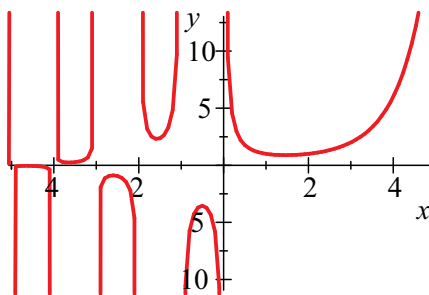
parametre:	λ, α
pravdepodobnostná funkcia:	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x < 0, \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}, & \text{pre } x \geq 0. \end{cases}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \frac{\alpha}{\lambda}$
rozptyl:	$D(\xi) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

Gamma funkcia

Gama funkcia (niekedy tiež označovaná aj ako Eulerov integrál II. druhu) je zovšeobecnením faktoriálu pre obor komplexných čísel. Používa sa v mnohých oblastiach matematiky, predovšetkým pre popis niektorých rozdelení v štatistike.

Definujeme ju ako

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx.$$



Obr. 5.4.1: Gamma funkcia reálnej premennej

Aj keď samotný integrál konverguje iba ak je reálna časť komplexného čísla z kladná, gama funkcia je definovaná pre ľubovoľné komplexné (a teda aj reálne) číslo, okrem nuly a celých záporných čísel $(-1, -2, \dots)$.

Funkcia $\Gamma(z)$ je spojitá pre $z > 0$.

Funkcia $\Gamma(z)$ diverguje pre $z \leq 0$.

Pre prirodzené čísla $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)$$

a pre kladné prirodzené čísla k , sa správa ako klasický faktoriál

$$\Gamma(k) = (k-1)!.$$

³Leonhard Paul Euler (*15. 4. 1707 – †18. 9. 1783) bol švajčiarsky matematik a fyzik. Väčšinu života prežil v Rusku a v Nemecku. Je považovaný za najlepšieho matematika 18. storočia a za jedného z najlepších matematikov vôbec.

5.5 Exponenciálne rozdelenie

Exponenciálne rozdelenie je špeciálnym prípadom gamma rozdelenia pre $\alpha = 1$. Používa sa na vyjadrenie časového úseku, ktorý uplynie medzi dvoma po sebe nasledujúcimi výskytmi sledovaného javu. Teda náhodné veličiny ξ obvykle reprezentuje čas, v ktorom jav nastane.

parameter:	λ
pravdepodobnostná funkcia:	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & \text{pre } x \geq 0 \end{cases}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$
rozptyl:	$D(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$

R Spojité exponenciálne rozdelenie je istou ekvivalenciou diskrétného Poissonovho rozdelenia. Slúži ako vhodný model pre výpočet pravdepodobnosti životnosti zariadení, pri riešení úloh z teórie hromadnej obsluhy a pod..

■ **Príklad 5.7** Priemerný výskyt nevhodného výroku politika na adresu maďarských spoluobčanov je 2 impertinentné výroky za mesiac.

Vypočítajme pravdepodobnosť, že

- urážlivý výrok zo strany tohto politika nastane do pol mesiaca,
- alebo naopak, politik bude umiernenější a obmedzí sa, a najbližšie vysloví hanlivý výrok až o dva mesiace.

Intenzita nastania udalosti je $\lambda = 2$ za mesiac, v našom prípade sa jedná o intenzitu počtu vulgárnych výrokov politika voči maďarským spoluobčanom za jeden mesiac.

a)

$$P(\xi = 0.5) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} = 2 \cdot e^{-2 \cdot 0.5} = 0.73576 = 73.6\%,$$

b)

$$P(\xi = 2) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} = 2 \cdot e^{-2 \cdot 2} = 0.0366 = 3.7\%.$$

Z výsledkov je čitateľné najbližšie chovanie politika na medzinárodnej scéne. ■

5.5.1 Alternatívna parametrizácia

Pre exponenciálne rozdelenie v niektorých literatúrach zavádzajú (a asi aj čitateľa) substitúciu $\beta = \frac{1}{\lambda}$.

parameter:	β
pravdepodobnostná funkcia:	$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pre } x < 0 \\ \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}}, & \text{pre } x \geq 0 \end{cases}$
stredná hodnota:	$E(\xi) = \beta$
rozptyl:	$D(\xi) = \beta^2$

Táto substitúcia má isté opodstatnenie, ak uvažujeme o nejakom systéme (napr.: mechanickom, biologickom alebo inom). Potom, ak náhodná veličina ξ predstavuje dobu, počas ktorej daný systém funguje bez poruchy, parameter β predstavuje strednú hodnotu doby fungovania systému tj. najpravdepodobnejšiu

dobu trvania počas, ktorej systém "vydrží" fungovať. Parameter β sa v literatúre označuje aj ako *survive parameter*. Parameter $\lambda = \frac{1}{\beta} = \beta^{-1}$ je pre zmenu zaužívané označovať ako *rate parameter*.

Pokiaľ náhodná veličina ξ predstavuje dobu do poruchy nejakého zariadenia, potom pravdepodobnosť, že zariadenie, ktoré pracovalo bez poruchy po dobu A hodín, bude pracovať bez poruchy ešte aspoň x hodín, je rovná pravdepodobnosti, že zariadenie, ktoré doposiaľ nebolo v prevádzke, bude pracovať aspoň x hodín. Skôr odpracovaná doba je zanedbaná. To je možné aplikovať pre zariadenia u ktorých nie je doba životnosti ovplyvnená dobou prevádzky. Stredná hodnota má potom tvar

$$E(\xi) = A + \frac{1}{\lambda} = A + \beta.$$

6. Popisná štatistika

V tejto kapitole budeme uvažovať o štatistickom súbore rozsahu N štatistických jednotiek (náhodných pokusov), pre ktorý sme zistili hodnoty skúmanej náhodnej premennej ξ pre každú štatistickú jednotku (náhodný pokus), čo znamená, že poznáme hodnoty x_i (pre $i = 1, 2, \dots, N$) skúmanej premennej ξ . x_i predstavuje konkrétnu hodnotu náhodnej premennej ξ pri i -to pokuse.

Rozdelenie pravdepodobností hodnôt náhodnej premennej ξ dostaneme tzv. *triedením*, tj. akýmsi vytváraním tried podobných štatistických jednotiek (pokusov).

Samozrejme, že najpodobnejšie sú si jednotky s rovnakými hodnotami skúmanej náhodnej premennej, avšak nie vždy sa dá zadeliť hodnoty týmto spôsobom, či už z dôvodu rozmanitosti súboru (napr. všetky hodnoty sú si navzájom rôzne a teda počet tried by sa rovnal rozsahu súboru), alebo sú to nominálne znaky (subjektívne hodnotenie, napr. slovné). V takýchto prípadoch triedu reprezentuje jeden reprezentant triedy (jedna konkrétna hodnota premennej). V prípade spojitého rozdelenia bude trieda reprezentovaná intervalom hodnôt (resp. stredom tohto intervalu).

Pri triedení je potrebné dodržať *zásadu úplnosti* (tj., každý prvok musí byť zaradený v nejakej triede) ako aj *zásadu jednoznačnosti* (tj., každý prvok musí byť zaradený iba v jednej triede).

Teraz by mal nasledovať podrobný popis zostavovania tabuľky početností pre štatistický súbor rozsahu n . Túto časť si však odpustíme a budeme sa ho snažiť čo najnázornejšie ilustrovať na nasledujúcom príklade.

■ **Príklad 6.1** Zisťoval sa počet obyvateľov v tridsiatich bytoch. Hodnoty sú:

3; 2; 4; 5; 2; 2; 3; 2; 4; 5; 1; 3; 4; 4; 5; 4; 1; 3; 6; 2; 3; 4; 6; 2; 3; 4; 1; 3; 5; 4.

Zostavme tabuľku rozdelenia početností.

Najskôr si ozrejmime základné pojmy a označenie:

namerané hodnoty	x_i ,	pre $i = 1, 2, \dots, N$,
absolútna početnosť	n_i	(koľkokrát sa znak vo výbere nachádza),
relatívna početnosť	$p_i = \frac{n_i}{N}$,	

kumulatívna početnosť $N_i = \sum_{l=1}^i n_l,$

kumulatívna relatívna početnosť $M_i = \frac{N_i}{N}.$

$x_i :$	$n_i :$	$p_i :$	$N_i :$	$M_i :$
1	3	$\frac{3}{30}$	3	$\frac{3}{30}$
2	6	$\frac{6}{30}$	9	$\frac{9}{30}$
3	7	$\frac{7}{30}$	16	$\frac{16}{30}$
4	8	$\frac{8}{30}$	24	$\frac{24}{30}$
5	4	$\frac{4}{30}$	28	$\frac{28}{30}$
6	2	$\frac{2}{30}$	30	$\frac{30}{30}$

$$\Sigma = 30 \quad \Sigma = 1$$

■ **Príklad 6.2** Pre tie isté byty sa určovali aj ich rozlohy:

82.6; 57.3; 70.4; 65; 48.4; 103.8; 73.6; 43.5; 66.1; 93; 52.6; 70; 84.2; 55; 81.3; 61.5;
75.1; 34.8; 62.4; 116; 70.1; 63.6; 93; 59.2; 65.9; 77.2; 52.8; 68.7; 79.2; 87.4.

Nájdite skupinovú rozdeľnosť pre počet tried $k = 9$.

Počet tried je zjavne menší ako počet hodnôt znaku, budeme preto musieť vytvoriť intervalové rozdelenie pravdepodobnosti.

Najskôr určíme na základe *variačného rozpätia*

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 116 - 34.8 = 81.2$$

a šírku triedy, ktorú budeme reprezentovať intervalom (určíme teda dĺžku tohto intervalu)

$$h = \frac{R}{k} = \frac{\text{variačného rozpätia}}{\text{počet tried}} = \frac{81.2}{9} = 9,0222 \doteq 10.$$

S ohľadom na zásadu úplnosti vždy zaokrúhľujeme dĺžku intervalu nahor, aby sme zaistili, dostatočný rozsah (minimálne rámec variačného rozpätia) a i krajné znaky boli obsiahnuté vo svojich triedach.¹

Reprezentantom triedy bude teraz stred k -tého intervalu x_j

	$x_j :$	$n_j :$	$p_j :$	$N_j :$	$M_j :$
$\langle 30; 40 \rangle$	35	1	$\frac{1}{30}$	1	$\frac{1}{30}$
$\langle 40; 50 \rangle$	45	2	$\frac{2}{30}$	3	$\frac{3}{30}$
$\langle 50; 60 \rangle$	55	5	$\frac{5}{30}$	8	$\frac{8}{30}$
$\langle 60; 70 \rangle$	65	7	$\frac{7}{30}$	15	$\frac{15}{30}$
$\langle 70; 80 \rangle$	75	7	$\frac{7}{30}$	22	$\frac{22}{30}$
$\langle 80; 90 \rangle$	85	4	$\frac{4}{30}$	26	$\frac{26}{30}$
$\langle 90; 100 \rangle$	95	2	$\frac{2}{30}$	28	$\frac{28}{30}$
$\langle 100; 110 \rangle$	105	1	$\frac{1}{30}$	29	$\frac{29}{30}$
$\langle 110; 120 \rangle$	115	1	$\frac{1}{30}$	30	$\frac{30}{30} = 1$

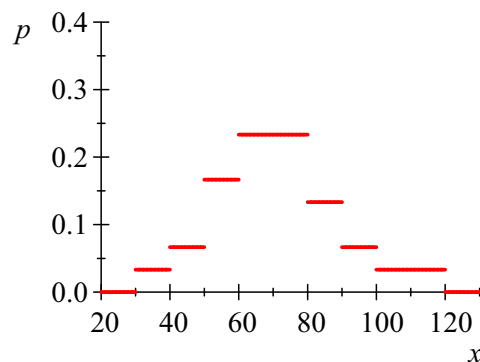
$$\Sigma = 30 \quad \Sigma = 1$$

¹Ale naozaj vždy!

V podstate sa jednalo o obdobný postup ako v predošlom príklade, avšak upozorňujeme na indexáciu s ohľadom na j , kde $j = 1, 2, \dots, k$, kde k predstavuje počet tried.

Pre názorné pochopenie je najvýhodnejšie výsledky reprezentovať graficky. Na tieto účely sa zvyčajne používa *histogram*.

Histogram je v podstate stĺpcový diagram, kde na x -ovú os nanášame hodnoty náhodnej premennej reprezentujúce triedy a na y -ovú os nanášame zodpovedajúce absolútne (resp. relatívne početnosti).



Obr. 6.o.1: *Histogram*

7. Odhady parametrov

Odhadom máme na mysli štatistickú metódu, pomocou ktorej sa približne určujú (odhadujú) neznáme parametre štatistických súborov.

Majme náhodný výber $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ z určitého rozdelenia, ktoré závisí na neznámom parametri Θ^1 , potom parameter Θ môže nadobúdať iba určité hodnoty z priestoru Ω . Prostredníctvom teórie odhadu sa snažíme vytvoriť štatistiku $T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, ktorej rozdelenie sa najviac blíži danému parametru $\Theta \in \Omega$. Odhady, pri ktorých hľadáme určitý parameter, nazývame parametrické odhady. Neparametrickými odhadmi nazývame odhady, pri ktorých nie je požadovaná parametrická špecifikácia typu pravdepodobnostného rozdelenia.

V zásade rozlišujeme dva typy odhadov, a to *bodové odhady*, kedy parameter odhadneme konkrétnou hodnotou, pričom sa zrejme dopustíme nejakej chyby a *intervalové odhady*, kde určíme interval, ktorý odhadovaný parameter obsahuje s vopred stanovenou pravdepodobnosťou.

7.1 Bodový odhad

Bodový odhad spočíva v nahradení neznámej hodnoty parametra základného súboru, alebo jeho funkcie, hodnotou výberovej charakteristiky.

Na bodový odhad kladieme určité nároky, čo sa týka jeho konzistentnosti a nevychýlenosti.

Konzistentným (nesporným) bodovým odhadom parametra Θ základného súboru nazývame takú štatistiku $T_n = T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, ktorá pre dostatočne veľké hodnoty indexu n spĺňa podmienku

$$P(|T_n - \Theta| \leq \varepsilon) < 1 - \eta,$$

pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a $\eta > 0$, tj. požadujeme, aby daný parameter patrilo do intervalu, ktorého polomer je menší ako ľubovoľne malé, ale kladné ε s pravdepodobnosťou $1 - \eta$, kde η je ľubovoľné kladné číslo, ktoré zväčša volíme čo najviac blízke nule. Inak povedané, konzistentným bude bodový odhad vtedy, ak bude ležať v čo najmenšom intervale s čo najväčšou pravdepodobnosťou.

Nevychýlený (nestranný) bodový odhad parametra Θ základného súboru nazývame štatistiku $T_n = T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, pre ktorej strednú hodnotu platí $E(T_n) = \Theta$. V opačnom prípade hovoríme o odhade

¹ Θ je veľké grécke písmeno "théta"

skreslenom (vychýlenom). Rozdiel $b(\Theta) = E(T_n) - \Theta$ nazývame vychýlením odhadu parametra Θ . Pokiaľ sa s rastúcim rozsahom n náhodného výberu skreslenie znižuje, potom je daná štatistika asymptoticky nestranným odhadom parametra Θ .

I. Najlepším neskresleným bodovým odhadom strednej hodnoty základného súboru

$$\mu = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i$$

je *výberový priemer*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i.$$

II. Najlepším neskresleným bodovým odhadom rozptylu základného súboru

$$D(\xi) = \sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

je *výberový rozptyl*

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

III. Najlepším neskresleným bodovým odhadom smerodajnej odchýlky základného súboru $\sigma = \sqrt{D(\xi)}$ je *výberová smerodajná odchýlka*

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

V prípade *skupinového rozdelenia pravdepodobnosti*, kde sú namerané hodnoty reprezentované stredmi intervalov a ich početnosťami, tj. ak nemáme k dispozícii priamo hodnoty, ale iba tabuľku skupinového rozdelenia, používame nasledujúce vzťahy.

I. Najlepším neskresleným bodovým odhadom strednej hodnoty základného súboru je *výberový priemer*

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^k n_j \cdot x_j,$$

II. najlepším neskresleným bodovým odhadom rozptylu základného súboru je *výberový rozptyl*

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^k n_j \cdot (x_j - \bar{x})^2,$$

III. najlepším neskresleným bodovým odhadom smerodajnej odchýlky základného súboru je *výberová smerodajná odchýlka*

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^k n_j \cdot (x_j - \bar{x})^2},$$

kde x_j predstavuje reprezentanta j -tej triedy, n_j je jeho početnosť a k predstavuje počet tried danej štatistiky. A platí $n = \sum_{j=1}^k n_j$.

■ **Príklad 7.1** Z príkladu 6.2 vezmeme iba hodnoty stredov intervalov a ich početností a odhadneme výberový priemer a výberový rozptyl.

Hodnoty

$x_j :$	35	45	55	65	75	85	95	105	115
$n_j :$	1	2	5	7	7	4	2	1	1

dosadíme do vzorcov pre výberový priemer

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^k n_j \cdot x_j = \frac{1}{30} \cdot \sum_{j=1}^9 n_j \cdot x_j = \\ n &= \frac{1}{30} \cdot (1 \cdot 35 + 2 \cdot 45 + 5 \cdot 55 + 7 \cdot 65 + 7 \cdot 75 + 4 \cdot 85 + 2 \cdot 95 + 1 \cdot 105 + 1 \cdot 115) \\ &= 71.\end{aligned}$$

a výberový rozptyl

$$\begin{aligned}S_x^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^k n_j \cdot (x_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{30-1} \cdot \sum_{j=1}^9 n_j \cdot (x_j - 71)^2 \\ &= \frac{1}{30-1} \cdot \left[1 \cdot (35-71)^2 + 2 \cdot (45-71)^2 + 5 \cdot (55-71)^2 + 7 \cdot (65-71)^2 + 7 \cdot (75-71)^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \cdot (85-71)^2 + 2 \cdot (95-71)^2 + 1 \cdot (105-71)^2 + 1 \cdot (115-71)^2 \right] \\ &= \frac{1}{30-1} \cdot (1296 + 1352 + 1280 + 252 + 112 + 784 + 1152 + 1156 + 1936) \\ &= 321.38.\end{aligned}$$

Výberová smerodajná odchýlka je teda rovná

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{321.38} = 17.927$$

Pre porovnanie uvedieme hodnoty výberový priemeru a výberový rozptylu vypočítané z pôvodných hodnôt

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 70.457, \\ S_x^2 &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 310.89, \\ S_x &= \sqrt{S_x^2} = \sqrt{310.89} = 17.632.\end{aligned}$$

Vidíme, že hodnoty sú takmer totožné. ■

Ďalšími odhadmi strednej hodnoty sú *modus* a *medián*.

Definícia 7.1.1 *Modus* predstavuje najčastejšie sa vyskytujúcu sa hodnotu znaku, je to "najpravdepodobnejšia" hodnota náhodnej veličiny pre daný znak (náhodný pokus).

Definícia 7.1.2 *Medián* je reprezentovaný hodnotou, ktorá je konkrétne "stredná hodnota" (v tomto prípade sú tie úvodzovky v skutku oprávnené, a naozaj žiadame čitateľa, aby si pojem nezamieňal so skutočnou strednou hodnotou μ) premennej v nejakom pokuse. Medián delí obor hodnôt na dve skoro rovnako pravdepodobné časti. Pre výrazne asymetrické rozdelenia vystihuje medián stred rozdelenia lepšie než stredná hodnota.

■ **Príklad 7.2** Pre elektrické vedenie sa vyžaduje vysoká pevnosť káblov v ťahu.

Hodnoty sa zisťovali pre dva druhy káblov:

I. druh

302, 310, 312, 310, 313, 318, 305, 309, 301, 309, 310, 307, 313, 229,
315, 312, 310, 308, 314, 333, 305, 310, 309, 314

II. druh

300, 310, 320, 309, 312, 311, 31, 317, 309, 313, 315, 314, 307, 322,
313, 313, 311, 316, 315, 314, 308, 319, 313, 312

Odhadnime strednú hodnotu pevnosti oboch druhov drôtu pomocou

- výberový priemeru,
- modusu,
- mediánu.

Vypočítame odhady pre prvý druh kábla, pre druhý typ necháme na čitateľových schopnostiach zopakovať totožný postup s inými hodnotami.

a) I. druh $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 307.42$

b) I. druh modusu ako najčastejšie sa vyskytujúci znak je hodnota 310, ktorá sa vyskytla 5 krát,

c) I. druh medián je tiež hodnota 310, lebo po usporiadaní znakov vzostupne je to hodnota v strede takéhoto usporiadania.

a) II. druh $[\bar{x} = 301.]$,

b) II. druh $[313; 4\text{-krát}]$,

c) II. druh $[313]$.

■

7.2 Intervalový odhad parametrov

V predošlej časti sme neznámy parameter odhadovali bodovo, tj. neznámy parameter sme *nabrádzali* konkrétnou hodnotou, ktorá ho najlepšie odhadovala. Je pochopiteľné, že použitím väčšieho výberového súboru dostaneme presnejšie výsledky ako pri menšom výberovom súbore, avšak metóda bodového odhadu tento fakt nezohľadňovala.

Ďalšou možnosťou odhadu parametra je intervalový odhad. Neznámy parameter odhadujeme intervalom, to znamená, že leží medzi dvoma hodnotami.

Stred intervalu je akýmsi odhadom parametra strednej hodnoty a šírka intervalu reprezentuje mieru rozptylu hodnôt strednej hodnoty.

Tento interval nazývame interval spoľahlivosti (T_a, T_b) a neznámy parameter Θ bude tento interval obsahovať s pravdepodobnosťou $(1 - \alpha)\%$, kde číslo α nazývame hladina významnosti. Túto hladinu si vopred volíme a vyjadruje požadovanú *mieru presnosti* s akou hľadáme interval, v ktorom sa parameter nachádza.

Ak výber opakujeme mnohokrát (vzhľadom na tendenciu stability náhodných procesov), potom neznámy parameter Θ prípadne do intervalu spoľahlivosti (T_a, T_b) približne v $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ prípadoch (tj. pravdepodobnosť, že daný parameter sa nachádza v intervale (T_a, T_b) je rovná práve číslu $1 - \alpha$).

Hovoríme o tzv. $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ -om intervale spoľahlivosti a zapisujeme

$$P(T_a \leq \Theta \leq T_b) = 1 - \alpha.$$

V prípade, že hranice T_a, T_b sú konečné, hovoríme o *obojsstrannom intervale spoľahlivosti*.

Ak $T_a = -\infty$, tj. $(-\infty, T_b)$, hovoríme o *pravostrannom intervale spoľahlivosti*.

Ak $T_b = \infty$, tj. (T_a, ∞) , hovoríme o *ľavostrannom intervale spoľahlivosti*.

Hranice závisia od odhadovaného parametra, od náhodného výberu a výberového rozdelenia. My sa však v ďalšom obmedzíme iba na normálne rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$, pre ktoré budeme odhadovať parameter μ a parameter σ^2 .

7.2.1 $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ obojsstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu μ

Výberový priemer má mať normálne rozdelenie so strednou hodnotou $E(\bar{x}) = \mu$ a rozptylom $D(\bar{x}) = \frac{S_x^2}{n}$,

a teda $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{S_x^2}{n}\right)$, ktorého hodnotu vieme nájsť pomocou substitúcie použitím distribučnej funkcie

$\Phi\left(\frac{\bar{x} - \mu}{S_x} \cdot \sqrt{n}\right)$ pre normálne normované rozdelenie $N(0, 1)$.

Pre zvolené α vieme nájsť v tabuľkách hodnoty kvantilov normálneho normovaného rozdelenia $u_{(1-\frac{\alpha}{2})}$ a $-u_{(1-\frac{\alpha}{2})}$, ktoré zodpovedajú hodnotám, pre ktoré je pravdepodobnosť, že stredná hodnota je v rámci zvolenej presnosti. A teda s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$ bude stredná hodnota v intervale $\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}}; u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$

$$P\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{S_x} \cdot \sqrt{n} \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha,$$

$$\begin{aligned} -\frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{(1-\frac{\alpha}{2})} &\leq \bar{x} - \mu \leq \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{(1-\frac{\alpha}{2})} \\ -\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} &\leq -\mu \leq -\bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}}.$$

V praxi sa však často vyskytujú súbory, ktoré či už z ekonomických, alebo čisto praktických dôvodov nebudú príliš rozsiahle (napr.: ak sa pri určovaní kvality výrobku tento zničí, alebo ak je sledovanie nejakého javu časovo alebo inak ekonomicky príliš náročné). A v prípade, ak je súbor malý, by sme sa použitím bodového odhadu dopustili značnej chyby.

V roku 1908 anglický chemik pivovaru Arthur Guinness & Son Brewery, W. S. Gosset² publikoval pod pseudonymom Student práce, v ktorých sa zaoberal práve malými výberovými súbormi. Odvodil výberové rozdelenie pre štatistiku s malým súborom, tj. $n < 30$. Toto rozdelenie nazývame *Studentovo t-rozdelenie*. Parametrom tohto rozdelenia je počet stupňov voľnosti. Ak máme náhodný súbor s rozsahom n prvkov, potom má Studentovo t -rozdelenie $(n - 1)$ stupňov voľnosti. Hodnoty Studentovho t -rozdelenia $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ sú pre jednotlivé stupne voľnosti a hladiny významnosti tabelované a sú uvedené v prílohe tohto textu.

²William Sealy Gosset (*13. 6. 1876 – †16. 9. 1937) anglický matematik a chemik. Zmluva s Guinnessovým pivovarom, z dôvodu ochrany výrobného tajomstva, neumožňovala zamestnancom publikovať akékoľvek práce, preto skoro všetky svoje publikácie zverejnil pod svojím pseudonymom "Student".

Studentovo t -rozdelenie

Gosset mal posúdiť kvalitu rôznych varených pív, pričom mal k dispozícii len obmedzený počet vzoriek. Predpokladal, že ak pri malých súboroch použije štatistiku $\Theta \sim \frac{\bar{x} - \mu}{S_x} \cdot \sqrt{n}$, v ktorej smerodajnú odchýlku σ nahradí výberovou štandardou odchýlkou S_x , podhodnotí sa variabilita. Výsledné Studentovo t -rozdelenie je však práca R. A. Fishera³. Studentovo rozdelenie s n stupňami voľnosti, ktoré označujeme $t^{(n)}$, je rozdelenie náhodnej veličiny $\xi = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$, kde X a Y sú navzájom nezávislé náhodné veličiny, pričom

X má normované normálne rozdelenie $X \sim N(0; 1)$ a Y má chi-kvadrát rozdelenie s n stupňami voľnosti, $\chi^2(n)$. (viď odsek 7.2.2)

Rozdelenie $t^{(n)}$ má, pre $-\infty < x < \infty$ a stupne voľnosti $n = 1, 2, 3, \dots$, hustotu pravdepodobnosti

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

strednú hodnotu má pre $n > 1$

$$E(\xi) = 0$$

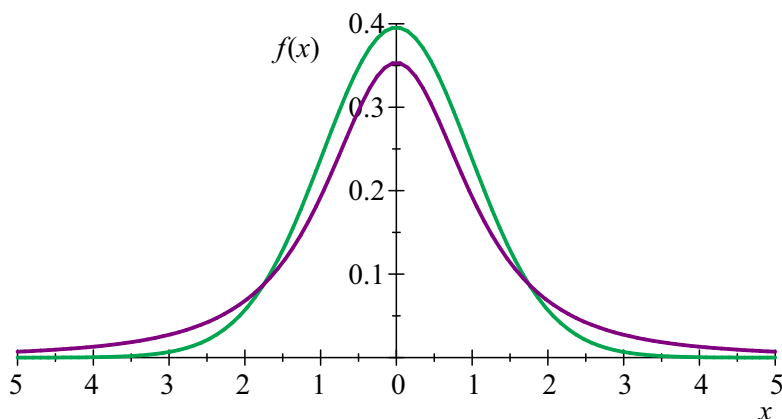
a rozptyl je pre $n > 1$ rovný

$$D(\xi) = \frac{n}{n-2}.$$

Ako vidno z hlavných charakteristík Studentovho t -rozdelenia je to rozdelenie symetrické a nakoľko je stredná hodnota $E(\xi) = 0$ je aj maximum grafu hustoty pravdepodobnosti v nule. Graf rozdelenia pravdepodobnosti je veľmi podobný grafu normovaného normálneho rozdelenia, avšak krivka Studentovho rozdelenia je viac zaoblená okolo strednej hodnoty. Nie je ťažké porovnaním hustôt pravdepodobností týchto dvoch rozdelení dokázať, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n)} = u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ je kvantil $N(0; 1)$ rozdelenia.



Obr. 7.2.1: Graf hustoty pravdepodobnosti Studentovho rozdelenia pre 30 stupňov voľnosti (zelená farba) a $N(0, 1)$ (fialová farba)

³Sir Ronald Aylmer Fisher, (*17. 2. 1890 – †29. 7. 1962) anglický štatistik, evolučný biológ, eugenik a genetik, známy predovšetkým teóriou prirodzeného výberu.

Pre súbory veľkého ($n \geq 30$) rozsahu použijeme pre intervalový odhad strednej hodnoty μ na hladine významnosti α hodnoty normálneho normovaného rozdelenia $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, a teda pre $n \geq 30$ platí

$$\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Pre súbory malého ($n < 30$) rozsahu použijeme pre intervalový odhad strednej hodnoty μ na hladine významnosti α hodnoty Studentovho t -rozdelenia $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ s $(n-1)$ stupňami voľnosti, a teda pre $n < 30$ platí

$$\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}.$$

■ **Príklad 7.3** Letecká spoločnosť odhaduje priemerný počet cestujúcich. V priebehu 20 dní bol priemerný počet cestujúcich 112 s výberovým rozptylom 25.

Nájďme 95% obojstranný interval spoľahlivosti pre priemerný počet cestujúcich μ .

Zo zadania vyplýva, že $\bar{x} = 112$; $S_x^2 = 25$ (tj.: $S_x = \sqrt{25} = 5$); $n = 20$. Nakoľko je súbor malý ($n = 20 < 30$), použijeme Studentovo rozdelenie, kde $t_{1-\frac{5\%}{2}}^{(20-1)} = t_{1-0.025}^{(19)} = t_{0.975}^{(19)} = 2.1$, a teda pre intervalový odhad bude platiť

$$\begin{aligned} \bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} &\leq \mu \leq \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}, \\ 112 - \frac{5}{\sqrt{20}} \cdot 2.1 &\leq \mu \leq 112 + \frac{5}{\sqrt{20}} \cdot 2.1, \\ 112 - 2.35 &\leq \mu \leq 112 + 2.35, \\ 109.65 &\leq \mu \leq 114.35. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 7.4** Z produkcie automatickej linky vyrábajúcej krúžky guľôčkových ložísk bola odobraná vzorka 50 kusov a zistený polomer krúžkov. Z nameraných hodnôt sme získali realizáciu priemeru $\bar{x} = 70.012$ mm. Nájďme 99-percentný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu polomeru vyrábaných krúžkov, ak z nameraných hodnôt sa realizácia štatistiky rovná $S_x^2 = 0.00723$.

Zrejme $\bar{x} = 70.012$; $S_x^2 = 0.00723$ (tj.: $S_x = \sqrt{0.00723} = 0.08503$); $n = 50$.

Nakoľko je súbor veľký ($n = 50 > 30$) použijeme normálne normované rozdelenie, kde $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.995} = 2.58$, a interval spoľahlivosti bude mať tvar

$$\begin{aligned} \bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{0.995} &\leq \mu \leq \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot u_{0.995}, \\ 70.012 - \frac{0.08503}{\sqrt{50}} \cdot 2.58 &\leq \mu \leq 70.012 + \frac{0.08503}{\sqrt{50}} \cdot 2.58, \\ 70.012 - 0.031 &\leq \mu \leq 70.012 + 0.031, \\ 69.981 &\leq \mu \leq 70.043. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 7.5** Meraním odporu kábla sa z ôsmich vzoriek vybraných náhodne získali nasledujúce hodnoty

0.139; 0.144; 0.139; 0.140; 0.136; 0.143; 0.141; 0.136.

Predpokladajme, že namerané hodnoty môžeme považovať za realizáciu náhodného výberu s normálnym rozdelením s neznámou strednou hodnotou a neznámym rozptylom.

Nájďme 95%-ný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu.

Najprv nájdeme výberový priemer $\bar{x}$ a výberovú odchýlku S_x .

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{8} \cdot (0.139 + 0.144 + 0.139 + 0.140 + 0.136 + 0.143 + 0.141 + 0.136) \\ &= 0.13975\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_x^2 &= \frac{1}{7} \cdot (0.139 - 0.13975)^2 + (0.144 - 0.13975)^2 + (0.139 - 0.13975)^2 \\ &\quad + (0.140 - 0.13975)^2 + (0.136 - 0.13975)^2 + (0.143 - 0.13975)^2 \\ &\quad + (0.141 - 0.13975)^2 + (0.136 - 0.13975)^2 \\ &= 8.5 \times 10^{-6} = 0.0000085,\end{aligned}$$

teda

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{8.5 \times 10^{-6}} = 2.9155 \times 10^{-3} = 0.0029155$$

Súbor je malý, použijeme teda kvantily Studentovho rozdelenia, kde $t_{0.975}^{(7)} = 2.365$.

A teda pre interval spoľahlivosti platí

$$\begin{aligned}\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.975}^{(7)} &\leq \mu \leq \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{0.975}^{(7)}, \\ 0.13975 - \frac{0.0029155}{\sqrt{8}} \cdot 2.365 &\leq \mu \leq 0.13975 + \frac{0.0029155}{\sqrt{8}} \cdot 2.365, \\ 0.13975 - 2.4378 \times 10^{-3} &\leq \mu \leq 0.13975 + 2.4378 \times 10^{-3}, \\ 0.13731 &\leq \mu \leq 0.14219.\end{aligned}$$

■

7.2.2 $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ obojstranný interval spoľahlivosti pre rozptyl σ^2

V mnohých prípadoch je dôležité sledovať nielen spoľahlivosť priemernej hodnoty súboru μ , ale aj mieru variability súboru. Tým máme na mysli najmä snahu znižovať odchýlky od priemernej hodnoty. Je zrejmé, že výrobca skrutiek s normou 5 cm, by asi ťažko uspel s polovicou produkcie 5.5 cm a druhou 4.5 cm. Pre výpočet intervalu spoľahlivosti štandardnej odchýlky budeme využívať ďalšie výberové rozdelenie označované *chi-kvadrát rozdelenie*, tj. χ^2 .

χ^2 rozdelenie

Nech má náhodná premenná n náhodných premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$ a každá má normálne rozdelenie s priemerom μ a štandardnou odchýlkou σ . Týmto náhodným premenným zodpovedajú normované náhodné premenné:

$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}, \dots, Z_n = \frac{x_n - \mu}{\sigma}.$$

Štatistika

$$W = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \dots + Z_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

má χ^2 -rozdelenie s počtom stupňov voľnosti n .

χ^2 -rozdelenie môžeme uplatniť i pre rozdelenie výberového rozptylu S_x^2 . Ak náhodným výberom zo základného súboru s normálnym rozdelením vytvoríme výberové súbory veľkosti n , potom náhodná premenná

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S_x^2}{\sigma^2}$$

má χ^2 -rozdelenie⁴ s $n-1$ stupňami voľnosti.

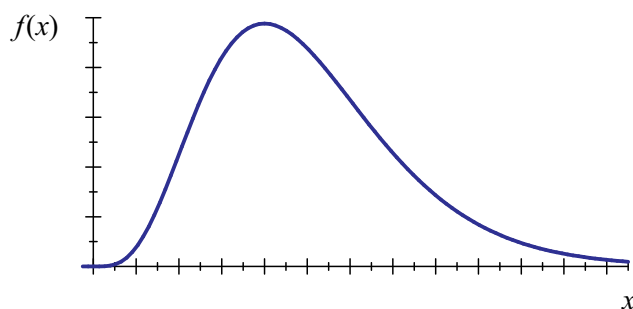
Pre náhodnú premennú $\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot S_x^2}{\sigma^2}$, modelujúcu rozptyl σ^2 , môžeme so spoľahlivosťou $(1-\alpha)$ určiť interval spoľahlivosti:

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \chi^2 \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2,$$

kde $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2$ a $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2$, sú $\frac{\alpha}{2}$ a $(1-\frac{\alpha}{2})$ kritické hodnoty χ^2 -rozdelenie.

Je dôležité si uvedomiť, že χ^2 -rozdelenie, narozdiel od normálneho rozdeleniu, je nesymetrické rozdelenie, a teda

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \neq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2.$$



Obr. 7.2.2: Graf hustoty χ^2 -rozdelenie

Hodnotu náhodnej premennej χ^2 teda nahradíme:

$$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \leq \frac{(n-1) S_x^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2,$$

úpravou dostaneme interval spoľahlivosti pre rozptyl σ^2 :

$$\boxed{\frac{(n-1) S_x^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) S_x^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}},$$

po odmocnení dostaneme interval spoľahlivosti pre štandardnú odchýlku σ

$$\boxed{\sqrt{\frac{(n-1) S_x^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1) S_x^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}}}.$$

⁴ χ je malé grécke písmeno "chi"

■ **Príklad 7.6** Nech systematická chyba meracieho prístroja je nulová. Za rovnakých podmienok sa vykonalo desať nezávislých meraní jednej a tej istej veličiny μ , kde $\mu = 1000$ m. Konkrétne údaje sú uvedené v tabuľke

$j :$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_j [m] :$	992	1010	1005	994	998	1000	1002	999	1000	997

Nájdime 90%-ný interval spoľahlivosti pre smerodajnú odchýlku σ .

Potrebuje vypočítať hodnotu výberového rozptylu S_x^2

$$\begin{aligned}
 S_x^2 &= \frac{1}{9} \cdot ((992 - 1000)^2 + (1010 - 1000)^2 + (1005 - 1000)^2 \\
 &\quad + (998 - 1000)^2 + (1000 - 1000)^2 + (1002 - 1000)^2 \\
 &\quad + (999 - 1000)^2 + (1006 - 1000)^2 + (997 - 1000)^2) \\
 &= 27.
 \end{aligned}$$

Z tabuliek kvantilov χ^2 -rozdelenie dostávame pre $\alpha = 0.1$ a $n = 10$, $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(9) = \chi_{0.95}^2(9) = 3.325$ a $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(9) = \chi_{0.05}^2(9) = 16.919$.

90%-ný interval spoľahlivosti pre smerodajnú odchýlku σ bude teda

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2}} &\leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}}, \\
 \sqrt{\frac{(10-1)S_x^2}{\chi_{0.05}^2}} &\leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(10-1)S_x^2}{\chi_{0.95}^2}}, \\
 \sqrt{\frac{9 \cdot 27}{16.919}} &\leq \sigma \leq \sqrt{\frac{9 \cdot 27}{3.325}}, \\
 \sqrt{14.363} &\leq \sigma \leq \sqrt{73.08}, \\
 3.7899 &\leq \sigma \leq 8.549.
 \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 7.7** Pri laboratórnom pokuse bolo treba, udržať štandardnú teplotu v laboratóriu 26.5 stupňov Celzia.

V jednom pracovnom týždni bolo nameraných 46 meraní, z ktorých sa získali hodnoty výberového priemeru $\bar{x} = 26.33$ stupňov Celzia a výberovej smerodajnej odchýlky $S_x = 0.748$.

Určite 95% interval spoľahlivosti pre μ , σ^2 a σ .

$$[\langle 26.11; 26.55 \rangle, \langle 0.3; 0.62 \rangle, \langle 0.59; 0.79 \rangle]$$

■

8. Testovanie štatistických hypotéz

Pod pojmom štatistická hypotéza rozumieme určité tvrdenie o rozdelení základného štatistického súboru, resp. o jeho parametroch (v prípade parametrických testov). Hypotézy sú tiež navzájom sa vylučujúce tvrdenia, ktorých zjednotením je istý jav.

Overovanie pravdivosti takýchto tvrdení na základe vlastností náhodného výberu označujeme testovanie hypotéz.

V ďalšom sa obmedzíme výlučne na parametrické testovanie. Testovať budeme parametre strednej hodnoty μ a rozptylu σ^2 (resp. smerodajnej odchýlky σ) náhodnej premennej s normálnym rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$. Vo všeobecnosti parameter označíme Θ .

8.1 Parametrické testovanie jedného súboru

Proti sebe postavíme dve disjunktné hypotézy:

nulovú hypotézu

$$H_0 : \Theta = \Theta_0,$$

alternatívnu hypotézu (opačné tvrdenie k nulovej hypotéze)

$$H_1 : \Theta \neq \Theta_0 \quad (\text{obojsmerný test}).$$

V prípade jednostranného testu stavíme proti nulovej hypotéze $H_0 : \Theta = \Theta_0$ alternatívnu hypotézu:

pre pravostranný test $H_1 : \Theta < \Theta_0$,

pre ľavostranný test $H_1 : \Theta > \Theta_0$.

R Pre jednostranné hypotézy by bolo korektnejšie formulovať nulovú hypotézu $H_0 : \Theta \geq \Theta_0$ proti alternatívnej hypotéze $H_1 : \Theta < \Theta_0$ (resp. $H_0 : \Theta \leq \Theta_0$ proti alternatívnej hypotéze $H_1 : \Theta > \Theta_0$). V ďalšom texte však od tohto označenia upustíme a aj pre jednostranné testy budeme nulovú hypotézu formulovať $H_0 : \Theta = \Theta_0$.

K rozhodovaniu použijeme vhodnú funkciu náhodnej veličiny, ktorú nazveme *testovacia štatistika* (kritérium). Obor hodnôt testovacej štatistiky rozdelíme na dve disjunktné (jedna odporuje druhej) časti:

obor prijatia hypotézy H_0 ,

obor zamietnutia (*neprijatia*) hypotézy H_0 .

Deliacimi bodmi oboru prijatia a oboru zamietnutia sú tzv. *kritické hodnoty*, ktoré budú zhodné s hodnotami príslušného rozdelenia na danej hladine významnosti.

Pri testovaní štatistických hypotéz budeme postupovať nasledovne:

1. určíme nulovú hypotézu H_0 a alternatívnu hypotézu H_1 ,
2. vyberieme testovaciu štatistiku,
3. určíme hladinu významnosti α a k nej príslušnú oblasť zamietnutia hypotézy H_0 ,
4. vypočítame hodnotu testovacej štatistiky,
5. rozhodnutie o prijatí, resp. zamietnutí hypotézy H_0 .

Uvedieme niekoľko parametrických testov pre parametre μ a σ .

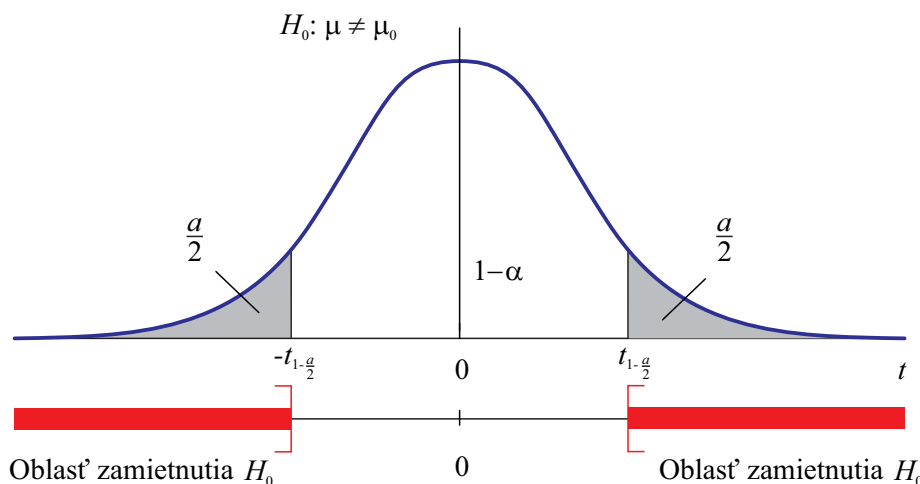
8.1.1 Testovanie parametra μ ak je súbor malý ($n \leq 30$)

Nulová hypotéza: $H_0 : \mu = \mu_0$.

Testovacia štatistika:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}, \quad \text{resp. } T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_x} \cdot \sqrt{n},$$

- a) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu \neq \mu_0$,
 oblasť zamietnutia H_0 : $|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$,
- b) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu < \mu_0$,
 oblasť zamietnutia H_0 : $T \leq -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ (ľavostranný test),
- c) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu > \mu_0$,
 oblasť zamietnutia H_0 : $T \geq t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ (pravostranný test).



Obr. 8.1.1: Obojstranný test parametra μ

■ **Príklad 8.1** Podľa Japonskej národnej agentúry vzrástla priemerná cena pozemkov centrálnej časti Tokia za prvých šesť mesiacov roku 1986 o 49%. Predpokladajme, že medzinárodná realitná spoločnosť chce overiť, či tvrdenie agentúry je pravdivé alebo nie. Spoločnosť náhodne vybrala 18 vlastníkov v centre Tokia, u ktorých boli známe ceny pozemkov na začiatku a v polovici roku 1986. Na základe údajov, ktoré mala k dispozícii zistila, že priemerný vzrast ceny pozemkov u vybraných 18 vlastníkov predstavoval za prvý polrok sledovaného roku 38% so štandardnou výberovou odchýlkou 14.

Na hladine významnosti $\alpha = 0.01$ overme pravdivosť tvrdenia agentúry.

Nulovú hypotézu a alternatívnu hypotézu môžeme zapísať:

$$H_0 : \mu = 49,$$

$$H_1 : \mu \neq 49.$$

Rozsah výberu je malý ($n = 18$) a smerodajnú odchýlku σ nepoznáme použijeme namiesto nej výberovú odchýlku S_x , a teda testovacia štatistika je rovná

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_x} \cdot \sqrt{n} = \frac{38 - 49}{14} \cdot \sqrt{18} = -3.33.$$

Pre určenie oblasti zamietnutia použijeme hodnoty kvantilov Studentovho rozdelenia, ktoré má $n - 1 = 17$ stupňov voľnosti, na hladine významnosti $\alpha = 0.01$,

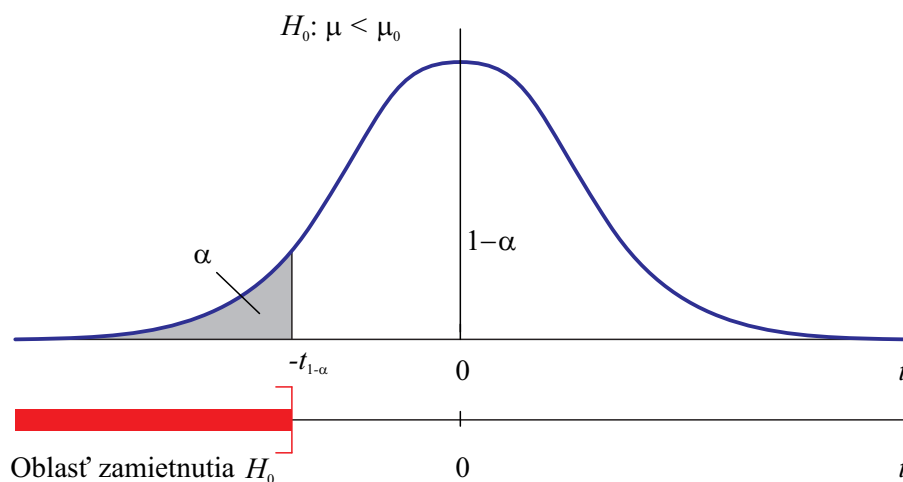
$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} = t_{1-\frac{0.01}{2}}^{(17)} = t_{0.995}^{(17)} = 2.898.$$

Oblasť zamietnutia H_0 je $|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$,

$$|-3.33| \geq 2.898.$$

Nulovú hypotézu H_0 teda zamietame, pretože hodnota -3.33 sa nachádza v oblasti jej zamietnutia.

Tvrdenie agentúry, že priemerná cena pozemkov centrálnej časti Tokia za prvých šesť mesiacov roku 1986 vzrástla o 49%, môžeme zamietnuť. ■

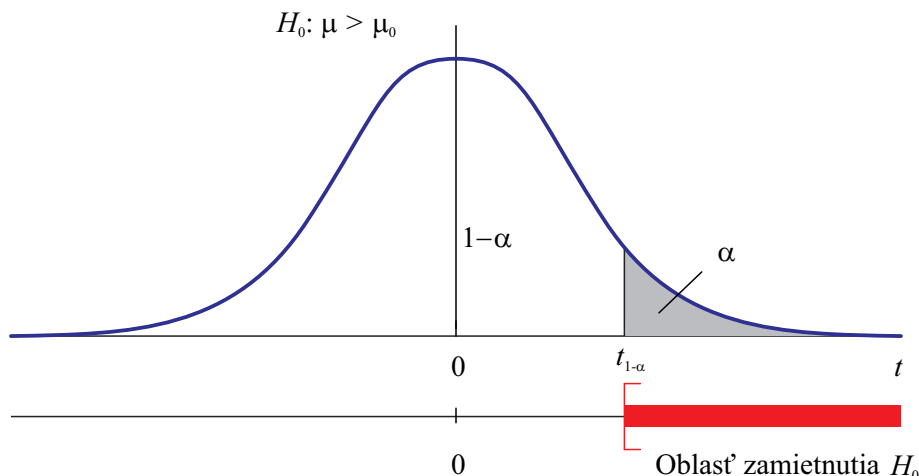


Obr. 8.1.2: Jednostranný test parametra μ

■ **Príklad 8.2** Výrobca uvádza, že priemerná životnosť ním vyrábaných reflektorov je 70 hodín. Konkurenčná firma sa domnieva, že je v skutočnosti nižšia, preto sa rozhodla dokázať, že výrobcovo tvrdenie nie je správne. Náhodne vybrala 20 reflektorov a zistila, že ich priemerná životnosť bola 67 hodín a štandardná odchýlka bola 5 hodín. Na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ overme, či výrobcovo tvrdenie je skutočne nesprávne.

Určíme nulovú hypotézu $H_0 : \mu = 70$ a alternatívnu hypotézu $H_1 : \mu < 70$. Vypočítame testovaciu štatistiku

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_x} \cdot \sqrt{n} = \frac{67 - 70}{5} \cdot \sqrt{20} = -2.683.$$

Obr. 8.1.3: Jednostranný test parametra μ

Hodnotu testovacej štatistiky porovnáme s kritickou hodnotou

$$-t_{1-\alpha}^{(n-1)} = -t_{0.95}^{(19)} = -1.73.$$

Na základe toho môžeme hypotézu H_0 zamietnuť, nakoľko $T < -t_{0.95}^{(19)}$, a teda prijímame hypotézu H_1 . Čiže domnienka konkurenčnej firmy sa potvrdila. ■

8.1.2 Testovanie parametra μ ak je súbor veľký ($n > 30$)

Nulová hypotéza: $H_0 : \mu = \mu_0$.

Testovacia štatistika:

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n}, \quad \text{resp. } T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_x} \cdot \sqrt{n},$$

- a) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu \neq \mu_0$,
oblasť zamietnutia H_0 : $|T| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$,
- b) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu < \mu_0$,
oblasť zamietnutia H_0 : $T \leq -u_{1-\alpha}$ (ľavostranný test),
- c) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu > \mu_0$,
oblasť zamietnutia H_0 : $T \geq u_{1-\alpha}$ (pravostranný test).

■ **Príklad 8.3** Priemerný čas uskutočnenia určitej výpočtovej úlohy na počítači je 4.56 sekúnd. Skupina výskumných pracovníkov testovala niekoľko nových algoritmov, u ktorých predpokladali, že by mohli zvýšiť rýchlosť výpočtu danej úlohy. O algoritme, ktorý vyvinuli, nevedeli povedať, či sa priemerná rýchlosť realizácie úlohy zvýšila, znížila, alebo zostala bez zmeny. Z toho dôvodu sa rozhodli otestovať štatistickú hypotézu, že priemerný čas realizácie výpočtu zostal bez zmien oproti alternatíve, že priemerný čas výpočtu sa zmenil. Náhodne uskutočnili 200 pokusov výpočtu rôznych úloh, pri ktorých zisťovali priemerný čas výpočtu rôznych úloh, pri ktorých zistili priemerný čas ich realizácie 4.23 sekúnd ($\bar{x} = 4.23$) a výberovou štandardnou odchýlkou 2.5 sekúnd ($S_x = 2.5$).

Môžeme na hladine významnosti $\alpha = 0.1$ urobiť záver, že priemerný čas výpočtu nového algoritmu sa znížil?

Zapíšeme nulovú a alternatívnu hypotézu

$$H_0 : \mu = 4.56,$$

$$H_1 : \mu < 4.56.$$

Rozsah je väčší ako 30, preto použijeme štatistiku

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S_x} \cdot \sqrt{n} = \frac{4.23 - 4.56}{2.5} \cdot \sqrt{200} = -1.867.$$

Následne zistíme, či patrí do oboru prijatia, pre ktorý platí

$$T \leq -u_{1-\alpha} = -u_{0.90} = -1.28.$$

Vidíme, že nepatrí do oboru prijatia hypotézy H_0 , preto musí patriť do oboru zamietnutia hypotézy H_0 , a teda na hladine významnosti 0.1, môžeme tvrdiť, že priemerný čas výpočtu nového algoritmu sa zrýchlil.

■

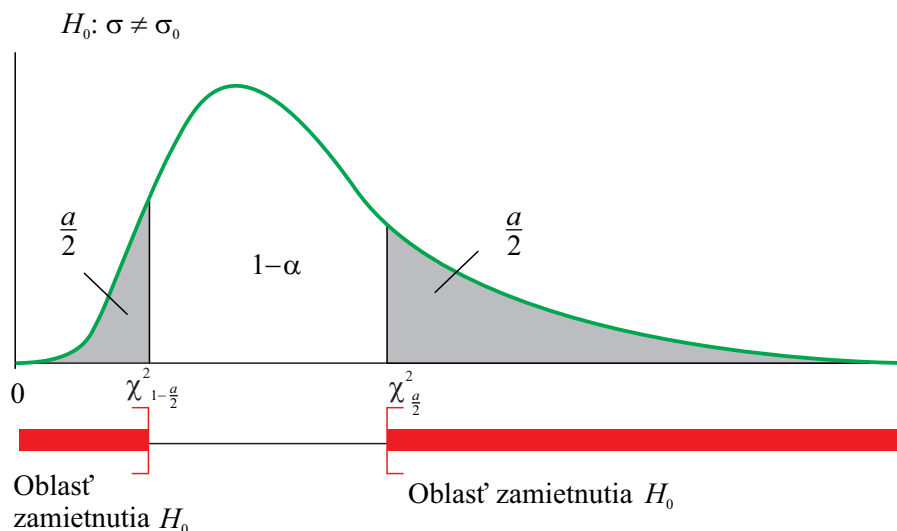
8.1.3 Testovanie parametra σ

Nulová hypotéza: $H_0 : \sigma = \sigma_0$.

Testovacia štatistika:

$$\chi^2 = \frac{(n-1) S_x^2}{\sigma_0^2},$$

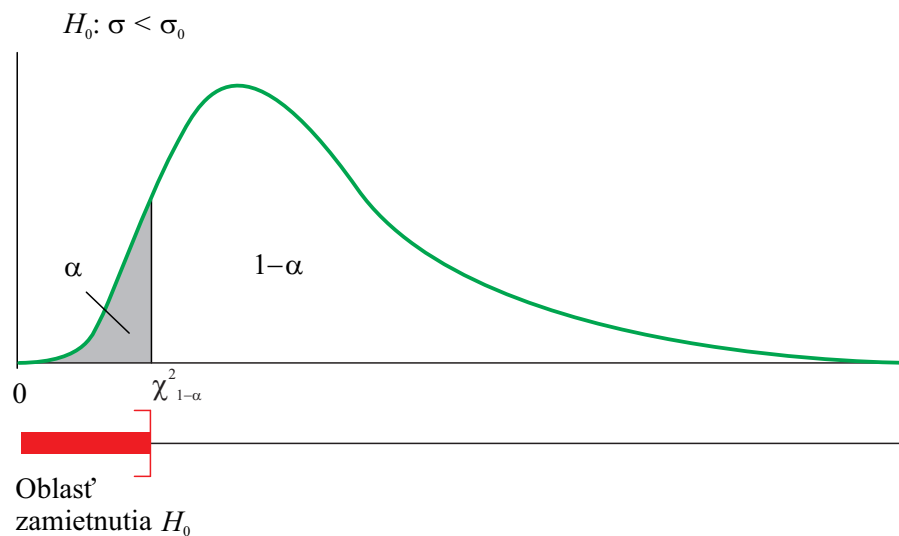
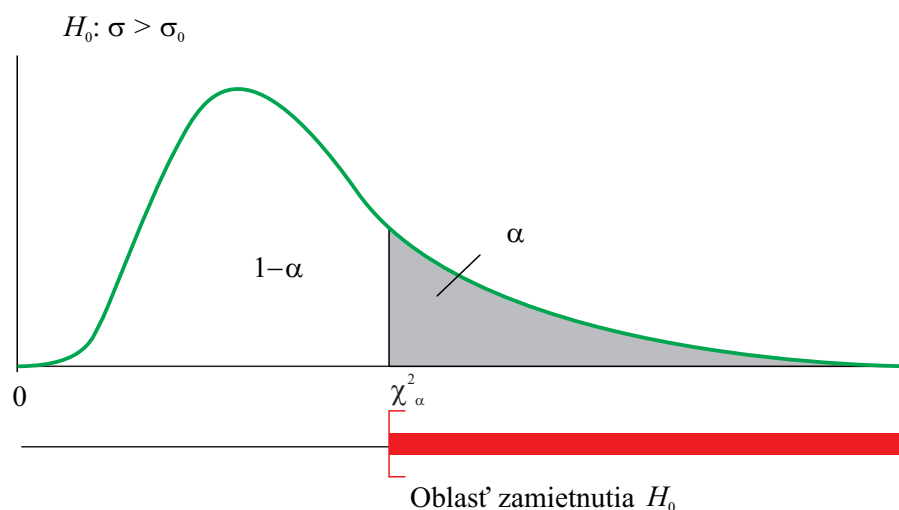
- a) alternatívna hypotéza: $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$,
oblasť zamietnutia H_0 : $\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2};(n-1)}^2$ alebo $\chi^2 \geq \chi_{\frac{\alpha}{2};(n-1)}^2$,
b) alternatívna hypotéza: $H_1 : \sigma < \sigma_0$,
oblasť zamietnutia H_0 : $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha;(n-1)}^2$ (ľavostranný test),
c) alternatívna hypotéza: $H_1 : \sigma > \sigma_0$,
oblasť zamietnutia H_0 : $\chi^2 \geq \chi_{\alpha;(n-1)}^2$ (pravostranný test).



Obr. 8.1.4: Obojstranný test parametra σ

■ **Príklad 8.4** Štandardná odchýlka obsahu určitej látky v tabletách, ktoré vyrába farmaceutický podnik, nesmie prekročiť hodnotu 0.45 miligramu. Ak prekročí túto hodnotu, musí sa urobiť korekcia v nastavení výrobnéj linky. Kontrolór náhodne vybral 25 tablet a zistil, že rozptyl obsahu sledovanej látky je 0.3383. Aký má urobiť záver, ak pripúšťa pravdepodobnostnú chybu I. druhu 5% (hladina významnosti $\alpha = 0.05$)?

$$n = 25, \quad \alpha = 0.05, \quad \sigma_0 = 0.45, \quad S_x^2 = 0.3383,$$

Obr. 8.1.5: Jednostranný test parametra σ Obr. 8.1.6: Jednostranný test parametra σ

$$H_0: \sigma = 0.45,$$

$$H_1: \sigma > 0.45.$$

Vypočítame testovaciu štatistiku

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1) \cdot 0.3383}{(0.45)^2} = 40.095.$$

Kritická hodnota je $\chi_{\alpha;(n-1)}^2 = \chi_{0.05;(24)}^2 = 36.415$.

$$40.095 > 36.415.$$

Hodnota testovacej štatistiky sa nachádza v oblasti zamietnutia hypotézy H_0 , na hladine významnosti 0.05 môžeme tvrdiť, že variabilita obsahu danej látky v tabletkách je vyššia ako prípustná norma hodnoty, a preto je nutné vykonať korekciu nastavenia výrobnnej linky. ■

8.2 Porovnávanie dvoch súborov

Často sa v praxi stretávame so situáciou, keď chceme porovnať dva súbory. Tým máme na mysli porovnať parameter strednej hodnoty μ týchto dvoch súborov, tj. či je jeden väčší alebo menší ako druhý resp. či sa rovnajú. Zisťujeme, či sú tieto súbory reprezentatami toho istého normálneho rozdelenia pravdepodobnosti $N(\mu, \sigma)$, alebo nie.

Pri porovnávaní priemerov dvoch súborov môžeme testovať niekoľko hypotéz. Zaujímať nás môže, či sa priemery rovnajú alebo nie (obojstranný test), alebo či je jeden menší resp. väčší ako druhý (jednostranný test). Pre uvedené situácie môžeme sformulovať nasledovnú nulovú hypotézu:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

proti alternatívnej hypotéze

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2, \text{ resp. } H_1 : \mu_1 > \mu_2, \text{ alebo } H_1 : \mu_1 < \mu_2.$$

8.2.1 Test o zhode priemerov, ak sú súbory veľké ($n > 30$) a σ_1, σ_2 poznáme

To, že súbory sú veľké, teda $n > 30$, je myslené ako suma počtostí oboch súborov, tj. $n = n_1 + n_2$.

Nulová hypotéza: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.

Testovacia štatistika:

$$U = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

- a) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $|U| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$,
- b) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 < \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $U \leq -u_{1-\alpha}$ (ľavostranný test),
- c) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 > \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $U \geq u_{1-\alpha}$ (pravostranný test).

■ **Príklad 8.5** Výber lokality pre nový obchodný dom závisí na mnohých faktoroch. Jedným z nich je úroveň príjmov domácností v oblasti okolo navrhovanej lokality. Predpokladajme, že veľký obchodný dom sa rozhoduje, či má postaviť svoj ďalší obchod v meste A alebo v meste B. Hoci náklady stavby sú nižšie v meste B, spoločnosť sa rozhodla, že bude stavať v meste A, ak sú tu priemerné mesačné príjmy domácností vyššie ako v meste B. Prieskum u 100 náhodne vybraných domácností každého mesta zisťoval, že ich priemerný mesačný príjem je v A 4380,- Sk, v meste B 4050,- Sk. Z iných zdrojov je známe, že štandardná odchýlka mesačných príjmov domácností je 520,- Sk u obyvateľov mesta A a 600,- Sk u obyvateľov mesta B.

Možno na hladine významnosti 5% tvrdiť, že priemerné mesačné príjmy domácností v meste A prekračujú priemerné mesačné príjmy v domácnosti v meste B? Predpokladajme, že príjmy v oboch mestách majú normálne rozdelenie.

Sformulujme hypotézy

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2,$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2.$$

Testovacia štatistika je

$$U = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(4380 - 4050)}{\sqrt{\frac{520^2}{100} + \frac{600^2}{100}}} = 4.156.$$

Oblasť zamietnutia H_0 pre $\alpha = 0.05$ je $U \geq u_{1-\alpha}$ ($u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 0.1645$).

Testovacia štatistika sa nachádza v oblasti zamietnutia, preto môžeme na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ zamietnuť hypotézu H_0 a potvrdiť hypotézu H_1 , že priemerné mesačné príjmy domácností v meste A sú vyššie ako v meste B. ■

8.2.2 Test o zhode priemerov, ak sú súbory malé ($n \leq 30$) a σ_1, σ_2 poznáme

Nulová hypotéza: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$,

Testovacia štatistika:

$$U = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

- a) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $|U| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$,
- b) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 < \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $U \leq -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$ (ľavostranný test),
- c) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 > \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $U \geq t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$ (pravostranný test).

8.2.3 Test o zhode priemerov, ak súbory sú veľké ($n > 30$) a σ_1, σ_2 nepoznáme

V prípade, že nepoznáme smerodajné odchýlky σ_1, σ_2 jednotlivých súborov a tieto sú veľké ($n > 30$), môžeme tieto parametre nahradiť ich odhadmi S_{x_1}, S_{x_2} (výberové štandardné odchýlky) a testovacia štatistika bude mať pre nulovú hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ tvar

$$U = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_{x_1}^2}{n_1} + \frac{S_{x_2}^2}{n_2}}}.$$

Pre oblasti zamietnutia bude platiť:

- a) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $|U| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$,
- b) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 < \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $U \leq -u_{1-\alpha}$ (ľavostranný test),
- c) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 > \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $U \geq u_{1-\alpha}$ (pravostranný test).

■ **Príklad 8.6** Pred niekoľkými rokmi užívatelia kreditných kariet tvorili niekoľko segmentov. Všeobecne u ľudí s vyššími príjmami a výdavkami prevažovala tendencia vlastniť kartu American Express, kým ľudia s nižšími príjmami a výdavkami využívali viac VISA karty. Z tohto dôvodu VISA zintenzívnila svoje úsilie viac preniknúť i do skupiny obyvateľstva s vyššími príjmami a pomocou reklám v časopisoch a televízií sa snažila vytvoriť u ľudí väčší dojem. Po určitom čase požiadala konzultačnú spoločnosť, aby zistila, či sa priemerné mesačné platby prostredníctvom American Express kariet Gold Card približne rovnajú platbám realizovanými VISA kartami Preferred VISA. Spoločnosť urobila prieskum, v ktorom náhodne vybrala 1200 držiteľov kariet Preferred VISA a zistila, že ich priemerné mesačné platby boli 452\$ s výberovou štandardnou odchýlkou 212\$. Nezávisle od tohto výberu náhodne vybrala 800 vlastníkov kariet Gold Card, ktorých priemerné mesačné platby predstavovali 523\$ s výberovou štandardnou odchýlkou 185\$. Držitelia oboch kariet boli z prieskumu vylúčení. Potvrdzujú výsledky výberového zisťovania rozdiel medzi výškou priemerných platieb realizovaných kartami Gold Card a VISA Preferred, overme tento predpoklad na hladine významnosti 0.01.

Sformulujme hypotézy.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2,$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Testovacia štatistika je

$$U = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{\frac{S_{x_1}^2}{n_1} + \frac{S_{x_2}^2}{n_2}}} = \frac{(452 - 523)}{\sqrt{\frac{212^2}{1200} + \frac{185^2}{800}}} = -7.927.$$

Pre $\alpha = 0.01$ je $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.995} = 2.58$.

Oblasť zamietnutia H_0 je $|U| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$; tj. $-7.927 \geq 2.58$. Vidíme, že testovacia štatistika do nej patrí. Na základe čoho môžeme tvrdiť, že medzi priemernými platbami realizovanými prostredníctvom uvedených dvoch kreditných kariet sú štatisticky významné rozdiely ■

8.2.4 Test o zhode priemerov, ak sú súbory malé ($n \leq 30$) a σ_1, σ_2 nepoznáme

Ak štandardnú odchýlku nepoznáme, porovnávanie μ_1, μ_2 pomocou nezávislých náhodných výberov malého rozsahu vyžaduje okrem nezávislosti výberov a normality rozdelenia základných súborov aj ďalšiu podmienku a to, že rozptyly oboch základných súborov sú si rovné ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$). Označme tento spoločný rozptyl oboch základných súborov σ^2 . Jeho hodnotu samozrejme taktiež nepoznáme, ale vieme ho odhadnúť pomocou *spoločného výberového rozptylu* S_p^2 výberových rozptylov. Odhad rozptylu základného prvého súboru má $(n_1 - 1)$ stupňov voľnosti a odhad rozptylu základného druhého súboru má $(n_2 - 1)$ stupňov voľnosti. Vzťah pre výpočet spoločného výberového rozptylu má tvar

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1) \cdot S_{x_1}^2 + (n_2 - 1) \cdot S_{x_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Odhad štandardnej chyby rozdielu priemerov $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ je daný vzťahom

$$S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}.$$

Testovacia štatistika pre test zhody priemerov dvoch základných súborov, za predpokladu rovnosti ich rozptylov, pri malých výberoch súborov, pre nulovú hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, potom je

$$U = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}},$$

- a) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $|U| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1+n_2-2)}$,
- b) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 < \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $U \leq -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$ (ľavostranný test),
- c) alternatívna hypotéza: $H_1 : \mu_1 > \mu_2$,
oblasť zamietnutia H_0 : $U \geq t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)}$ (pravostranný test).

■ **Príklad 8.7** Výrobca prehrávačov kompaktných diskov chce zistiť, či ním navrhované malé zníženie cien jeho výrobkov je dostatočné pre zvýšenie objemu ich predaja. Náhodným výberom údajov o 14 týždenných tržbách v jednom obchode pred znížením cien zistil, že priemerné týždenná tržba bola 39 600 korún so štandardnou odchýlkou 5 060 korún. Náhodným výberom 11 týždenných tržieb za jeho

výrobky po znížení ich cien zistil, že priemerná týždenná tržba bola 41 200 korún so štandardnou odchýlkou 4 010 korún. Dokazujú uvedené údaje, že malé zníženie cien je dostatočné pre zvýšenie predaja CD prehrávačov, ak použijeme hladinu významnosti 0.05?

Zisťujeme, či objem predaja pred znížením (súbor č. 1) je nižší, ako objem predaja po znížení (súbor č. 2). Ide o ľavostranný test, kde nulová a alternatívna hypotéza sú formulované

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2,$$

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2.$$

Predpokladáme, že rozptyly oboch súborov sú rovnaké. Testovacia štatistika je

$$U = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{(39600 - 41200)}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{11} \right)}} =$$

kde spoločný výberový rozptyl je rovný

$$S_p^2 = \frac{13 \cdot 5060^2 + 10 \cdot 4010^2}{23} = 2.146 \times 10^7$$

a po dosadení dostávame

$$U = -0.857.$$

Oblasť zamietnutia nulovej hypotézy na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ je

$$U \leq -t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} = -t_{0.95}^{(14+11-2)} = -t_{0.95}^{(23)} = -1.714.$$

Hodnota testovacej štatistiky sa nachádza v oblasti prijatia, preto môžeme na hladine významnosti $\alpha = 0.05$ tvrdiť, že výrobcom navrhnuté zníženie cien CD prehrávačov neprinieslo vzrast objemu predaja. ■

9. Korelačná analýza

Koreláciou rozumieme vzájomný lineárny vzťah (závislosť) dvoch náhodných premenných X a Y ¹. Tento vzťah môže byť priamy, tj. s rastúcimi hodnotami jednej premennej rastú hodnoty druhej premennej, resp. nepriamy, tj. s rastúcimi hodnotami jednej premennej klesajú hodnoty druhej.

9.1 Koeficient kovariancie

O tom či sú dve premenné X a Y vo vzájomnom priamom lineárnom vzťahu, alebo nepriamom, sa môžeme presvedčiť pomocou *koeficientu kovariancie* premenných X a Y , ozn.: $\text{cov}xy$. Tento je definovaný

$$\text{cov}xy = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Kladná hodnota kovariancie ($\text{cov}xy > 0$), indikuje priamy lineárny vzťah medzi premennými X a Y . Záporná hodnota kovariancie ($\text{cov}xy < 0$), nepriamy priamy lineárny vzťah medzi premennými X a Y .²

R Kovarianciu možno definovať aj ako

$$\text{cov}xy = E(XY) - E(X) \cdot E(Y),$$

čo bolo naznačené v druhej rovnosti vzťahu definujúceho kovarianciu.

Kovariancia tej istej premennej je definovaná

$$\text{cov}xx = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = D(x) = \sigma_x^2.$$

¹V tejto časti, kvôli prehľadnosti, upúšťame od označenia náhodných premenných gréckymi písmenami ξ a namiesto označenia $\xi_1, \xi_2, \dots$ budeme v ďalšom používať označenie $X, Y, \dots$

²Ak sú premenné X a Y úplne nezávislé, potom $\text{cov}xy = 0$.

9.2 Koeficient korelácie

Podľa koeficientu kovariancie vieme určiť, či dané sú premenné priamo alebo nepriamo závislé, ale nevieme určiť mieru variability spôsobenú linearitou, teda nevieme určiť do akej miery sú premenné lineárne závislé. Sila lineárneho vzťahu dvoch premenných v základnom súbore je daná *koeficientom korelácie* r_{XY} , ten môže nadobúdať iba hodnoty z intervalu $(-1; 1)$.

Hodnoty blízke -1 sa interpretujú ako vysoká *nepriama lineárna závislosť* a naproti tomu hodnoty blízke 1 zas indikujú *vysokú priamu lineárnu závislosť*.

Hodnoty blízke ± 0.5 interpretujeme ako *slabú lineárnu závislosť*.

Ak sú však hodnoty blízke nule, nemôžeme tvrdiť, že premenné X a Y sú nezávislé, alebo to, že sú *lineárne nekorelovateľné*, čím máme na mysli napr. nelineárnu závislosť.

Predpokladajme, že poznáme n párov dvojíc hodnôt $[x_i, y_i]$ premenných X a Y získaných náhodným výberom pre $i = 1, 2, \dots, n$ štatistických jednotiek zo základného súboru. Potom sila vzájomnej lineárnej závislosti premenných X a Y meraná koeficientom korelácie súboru r_{XY} je definovaná

$$r_{XY} = \frac{\text{cov}xy}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Použitím odhadov dostávame

$$r_{XY} = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y} - \bar{\bar{x}} \cdot \bar{\bar{y}}}{\sqrt{\bar{x}^2 - \bar{\bar{x}}^2} \sqrt{\bar{y}^2 - \bar{\bar{y}}^2}},$$

a po úplnom vyjadrení bude mať vzťah, tzv. *Pearsonov³ koeficient korelácie*

$$r_{XY} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}}.$$

Pomerne vysoká hodnota koeficientu korelácie ($|r| \geq 0.7$) znamená, že medzi premennými X a Y je vysoká vzájomná lineárna závislosť, ale to neznamená, že medzi premennými existuje aj vysoká príčinná závislosť, pretože môže existovať ďalšia premenná napr. Z , od ktorej je premenná Y taktiež lineárne závislá a ktorou sa lepšie vysvetlí variabilita hodnôt premennej Y .

Stupeň príčinnej závislosti premenných X a Y určujú koeficient determinácie, definovaný v ďalšom.

9.3 Koeficient determinácie

Stupeň príčinnej závislosti premennej Y od premennej X vyjadruje koeficient determinácie, definovaný ako druhá mocnina koeficientu korelácie r . Vo výberovom súbore ho označujeme r^2 .

Interpretácia koeficienta determinácie vychádza z analýzy variability (rozptylu) závisle premennej Y , ktorú by mala do značnej miery vysvetliť variabilita nezávisle premennej X za predpokladu, že od nej lineárne závisí veľkosť hodnôt Y .

Ak napr. $r = 0.7$, potom $r^2 = 0.49$, čo znamená, že iba 49% variability premennej Y sa dá vysvetliť lineárnym vzťahom s premennou X (regresnou priamkou). Pretože 51% variability premennej Y zostalo nevysvetlenej lineárnym vzťahom s premennou X je zjavné, že model bol zvolený nevhodne (namiesto lineárnej závislosti sa mala uvažovať nelineárna závislosť).

■ **Príklad 9.1** Pracovník personálneho oddelenia určitého podniku cíti, že existuje vzťah medzi počtom dní absencie v práci a vekom pracovníka. Náhodne vyberie pracovné záznamy 10 pracovníkov a získa

³ Karl Pearson (* 27. 3. 1857 – † 27. 4. 1936) bol anglický matematik a filozof, zástanca machizmu.

údaje o ich veku v rokoch (náhodná premenná X v rokoch) a počte dní, v ktorých nenastúpili do práce počas kalendárneho roka (náhodná premenná Y).

Údaje sú uvedené v tabuľke

$x_i :$	27	61	37	23	46	58	29	36	64	40
$y_i :$	15	6	10	18	9	7	14	11	5	8

Za predpokladu, že medzi počtom dní absencie a vekom pracovníka je lineárna závislosť, posúďte, či je priama alebo nepriama.

Vypočítajte koeficient korelácie a koeficient determinácie.

Medzivýsledky získame z tabuľky, ktorú mierne modifikujeme

n	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	27	15	729	225	405
2	61	6	3721	36	366
3	37	10	1690	100	370
4	23	18	529	324	414
5	46	9	2116	81	414
6	58	7	3364	49	406
7	29	14	841	196	406
8	36	11	1296	121	396
9	64	5	4096	25	320
10	40	8	1600	64	320
Σ	421	103	19661	1221	3817

Medzivýsledky zapíšeme ešte raz

$$\begin{aligned}
 n &= 10, \\
 \sum_{i=1}^n x_i &= 421, \\
 \sum_{i=1}^n y_i &= 103, \\
 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 19661, \\
 \sum_{i=1}^n y_i^2 &= 1221, \\
 \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i &= 3817.
 \end{aligned}$$

Pre výpočet kovariancie je najvhodnejšie použiť vzťah

$$\begin{aligned}
 \text{cov}xy &= \bar{x} \cdot \bar{y} - \bar{\bar{x}} \cdot \bar{\bar{y}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \\
 &= \frac{3817}{10} - \frac{421}{10} \cdot \frac{103}{10} = -\frac{5193}{100} = -51.93.
 \end{aligned}$$

Medzi počtom dní absencie v roku a vekom pracovníka je nepriama lineárna závislosť (s rastúcim vekom počet dní v roku, v ktorých pracovník nenastúpi do práce bez udania dôvodu, klesá).

Dosadením do vzťahu

$$r_{XY} = \frac{\text{cov}xy}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-51.93}{13.917 \cdot 4.001} \doteq -0.93262.$$

kde σ_x a σ_y sme odhadli ako

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \overline{x \cdot x} - \bar{x} \cdot \bar{x} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \\ &= \frac{19661}{10} - \left(\frac{421}{10} \right)^2 = 193.69,\end{aligned}$$

a teda $\sigma_x = \sqrt{193.69} = 13.917$,

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)^2 = \frac{1221}{10} - \left(\frac{103}{10} \right)^2 = 16.01,$$

a teda $\sigma_y = \sqrt{16.01} = 4.001$.

Ďalšia možnosť je dosadiť priamo do vzťahu Pearsonovho koeficientu korelácie

$$\begin{aligned}r_{XY} &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\left(n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \cdot \left(n \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right)}} \\ &= \frac{10 \cdot 3817 - 421 \cdot 103}{\sqrt{(10 \cdot 19661 - 421^2) \cdot (10 \cdot 1221 - 103^2)}} \doteq -0.93254.\end{aligned}$$

Koeficient korelácie $r = -0.93$ interpretujeme ako vysokú nepriamu lineárnu závislosť medzi počtom dní absencie v roku a vekom pracovníka.

Koeficient determinácie $r^2 = (-0.93)^2 = 0.8649$ znamená, že 87% variability počtu dní absencie v roku je vysvetlená vplyvom veku pracovníka a 13% variability počtu dní absencie v roku možno vysvetliť inými príčinami ako je lineárnosť medzi premennými X a Y .

■

■ **Príklad 9.2** Skupinu 100 náhodne vybraných manželských párov sme roztriedili podľa veku manželky (X) a veku manžela (Y). Charakterizujte stupeň závislosti medzi vekom manžela a vekom manželky koeficientom korelácie.

$X \backslash Y$	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55	45 – 60	65 – 75
15 – 25	11	7				
25 – 35	1	17	8	1		
35 – 45		2	18	5	1	
45 – 55			2	13	3	
45 – 60				1	6	1
65 – 75					1	2

$X \setminus Y$	15 – 25	25 – 35	35 – 45	45 – 55	45 – 60	65 – 75	Σ	$n_{j,X} \cdot x$	$n_{j,F} \cdot x^2$
15 – 25	11	7					18	$18 \cdot 20$	$18 \cdot 20^2$
25 – 35	1	17	8	1			27	$27 \cdot 30$	$27 \cdot 30^2$
35 – 45		2	18	5	1		26	$26 \cdot 40$	$26 \cdot 40^2$
45 – 55			2	13	3		18	$18 \cdot 50$	$18 \cdot 50^2$
45 – 60				1	6	1	8	$8 \cdot 60$	$8 \cdot 60^2$
65 – 75					1	2	3	$3 \cdot 70$	$3 \cdot 70^2$
Σ	12	26	28	20	11	3	100	3800	161600
$n_{j,Y} \cdot y$	$12 \cdot 20$	$25 \cdot 30$	$28 \cdot 40$	$20 \cdot 50$	$11 \cdot 60$	$3 \cdot 75$	4010		
$n_{j,Y} \cdot y^2$	$12 \cdot 20^2$	$25 \cdot 30^2$	$28 \cdot 40^2$	$20 \cdot 50^2$	$11 \cdot 60^2$	$3 \cdot 75^2$	177300		

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^k (n_{j,X} \cdot x_j) = \frac{1}{100} \cdot 3800 = 38.0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^k (n_{j,Y} \cdot y_j) = \frac{1}{100} \cdot 4010 = 40.1,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^k (n_{j,X} \cdot x_j^2) = \frac{1}{100} \cdot 161600 = 1616.0,$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^k (n_{j,Y} \cdot y_j^2) = \frac{1}{100} \cdot 177300 = 1773.0,$$

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^k (n_j \cdot x_j \cdot y_j) = \frac{1}{100} \cdot (11 \cdot 20 \cdot 20 + 7 \cdot 20 \cdot 30 \\ &\quad + 1 \cdot 30 \cdot 20 + 17 \cdot 30 \cdot 30 + 8 \cdot 30 \cdot 40 + 1 \cdot 30 \cdot 50 \\ &\quad + 2 \cdot 40 \cdot 30 + 18 \cdot 40 \cdot 40 + 5 \cdot 40 \cdot 50 + 1 \cdot 40 \cdot 60 \\ &\quad + 2 \cdot 50 \cdot 40 + 13 \cdot 50 \cdot 50 + 3 \cdot 50 \cdot 60 \\ &\quad + 1 \cdot 60 \cdot 50 + 6 \cdot 60 \cdot 60 + 1 \cdot 60 \cdot 70 \\ &\quad + 1 \cdot 70 \cdot 60 + 2 \cdot 70 \cdot 70) \\ &= 1675, \end{aligned}$$

$$\text{cov}xy = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = 1675 - 38 \cdot 40.1 = 151.2,$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x \cdot x} - \bar{x} \cdot \bar{x} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 1616 - 38^2 = 172.0,$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y \cdot y} - \bar{y} \cdot \bar{y} = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = 1773 - 40.1^2 = 164.99,$$

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}xy}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{151.2}{\sqrt{172.0 \cdot 164.99}} = 0.89755.$$

Koeficient korelácie indikuje silnú priamu lineárnu závislosť medzi vekom manželky a manžela.

$$r_{xy}^2 = 0.897552^2 = 0.80560.$$

Z koeficienta determinácie vidíme, že až 81% variability je vysvetlená lineárnou závislosťou. ■

V predošlom príklade boli hodnoty dané inak ako sme boli zvyknutý doteraz. Boli zapísané tzv. kontingenčnej tabuľke, kde každému políčku reprezentujúcemu dvojicu hodnôt oboch súborov, prislúchala daná početnosť. Pri riešení sme rozmiestnenie početností náležite využili. Použitím tabuľkového editora sa zrejme aj samotné rutinné výpočty zrýchlia.

10. Párová lineárna regresia

Ak existuje medzi premennými X a Y významná lineárna závislosť, tj. koeficient korelácie je štatisticky významný, bude nás zrejme zaujímať aj rovnica priamky, ktorá túto závislosť medzi premennými X a Y najlepšie charakterizuje. Určenie regresného modelu je dôležité pre určenie neznámej závislej premennej Y pre hodnotu nezávislej premennej X .

Z matematiky poznáme lineárny vzťah ako súbor dvojíc $[x, y]$, ktoré ležia na priamke $Y = aX + b$. V praktických situáciách, akými sa zaoberá štatistika, vzťah medzi premennými X a Y nie je funkčne lineárny, pretože namerané hodnoty $[x_i, y_i]$ neležia na priamke, ale majú tendenciu ju vytvárať. V takomto prípade hovoríme o štatistickej lineárnej závislosti.

10.1 Regresná priamka

Predpokladajme, že testujeme dve fyzikálne veličiny X a Y , medzi ktorými existuje lineárna závislosť

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X.$$

Parametre β_0, β_1 sú neznáme. Preto urobíme experiment, pri ktorom sa zisťujú hodnoty dvojíc $[x, y]$. Meranie hodnôt x prebieha celkom presne, často je možné x nastavovať na vopred danú úroveň, zatiaľ čo y sa meria s chybou. Preto zavádzame štatistický model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i + \varepsilon_i, \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, n,$$

kde

y_i je i -ta hodnota premennej Y vo výberovom súbore,

β_0 je veľkosť premennej Y , ak premenná $X = 0$, v základnom súbore,

β_1 je regresný koeficient v základnom súbore, ktorý udáva o koľko sa zmení y_i , ak sa x_i zmení o 1mernú jednotku,

x_i je i -ta hodnota premennej X vo výberovom súbore,

ε_i je náhodná chyba premennej Y pre i -te pozorovanie s rozdelením $N(0, \sigma^2)$.

10.2 Odhad parametrov β_0 a β_1

Parametre sa odhadujú *metódou najmenších štvorcov*. Minimalizuje sa súčet štvorcov odchýlok medzi nameranými a teoretickými hodnotami Y

$$Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot x_i)^2 \rightarrow \min.$$

Čo vedie na systém lineárnych rovníc pre regresnú priamku

$$\begin{aligned} \beta_0 \cdot n + \beta_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ \beta_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + \beta_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i. \end{aligned}$$

Rôznymi algebrickými úpravami sa dá dosiahnuť, že koeficienty priamky β_0, β_1 možno vypočítať aj podľa iných vzťahov, ktoré sú užitočné najmä vtedy, ak nepoznáme hodnoty $[x_i, y_i]$ výberového súboru, ale poznáme jeho charakteristiky, ako sú priemery premenných X a Y , štandardné odchýlky X a Y resp. rozptyly, kovarianciu premenných X a Y , koeficient korelácie. Pre koeficienty regresnej priamky potom platí

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\text{cov}_{xy}}{\sigma_x} = r_{XY} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}, \\ \beta_0 &= \bar{y} - \beta_1 \bar{x}. \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

■ **Príklad 10.1** Na základe údajov z príkladu 9.1 vytvorme bodový odhad regresnej priamky závislosti počtu dní absencie a veku pracovníka, a zároveň vytvorme bodový odhad počtu dní absencie 25 ročného pracovníka.

Z príkladu 9.1 vieme, že

$$\begin{aligned} n &= 10, \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 421, \\ \sum_{i=1}^n y_i &= 103, \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 19661, \\ \sum_{i=1}^n y_i^2 &= 1221, \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i &= 3817. \end{aligned}$$

Po dosadení do sústavy

$$\begin{aligned} \beta_0 \cdot n + \beta_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ \beta_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + \beta_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \beta_0 \cdot 10 + \beta_1 \cdot 421 &= 103, \\ \beta_0 \cdot 421 + \beta_1 \cdot 19661 &= 3817, \end{aligned}$$

ktorej riešením dostaneme koeficienty $\beta_0 = 21.587$ a $\beta_1 = -0.268$ a regresná rovnica má tvar

$$y = 21.587 - 0.268 \cdot x.$$

Bodový odhad počtu dní absencie 25 ročného pracovníka vytvoríme jednoduchým dosadením do regresného modelu hodnoty $x_i = 25$

$$y_i = 21.587 - 0.268 \cdot 25 = 14.887.$$

Dá sa očakávať, že priemerný počet dní absencie 25 ročného pracovníka bude približne 15 dní v kalendárnom roku. ■

■ **Príklad 10.2** Odhadnime parametre regresnej priamky z príkladu 9.2.

Použitím vzorcov (10.2.1) dostávame

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\text{cov}xy}{\sigma_x} = \frac{151.2}{172} = 0.87907, \\ \beta_0 &= 40.1 - 0.87907 \cdot 38 = 6.6953,\end{aligned}$$

a teda regresná priamka má tvar

$$y = 6.6953 + 0.87907 \cdot x.$$

■

11. Chyby numerických algoritmov

V odbornej praxi sa často stretávame s matematickým modelovaním procesov a ich simuláciou. Pri týchto procesoch je nutné riešiť sekundárne matematické úlohy, ktorých analytické riešenie nie je s praktických dôvodov možné alebo reálne. Preto sa pôvodná úloha transformuje na úlohu, ktorá konečným počtom krokov dospeje k približnému riešeniu s prípustnou odchýlkou, tzv. *aproximácia*.

Pod pojmom *numerické metódy* rozumieme metódy získavania približných výsledkov (riešení úloh) s vopred stanovenou presnosťou (prípustnou chybou).

Chyby pri numerických výpočtoch

Uvedieme si niekoľko možných zdrojov chýb pri numerických výpočtoch, zdôrazníme ich význam a spôsoby ich eliminácie.

11.0.1 Zdroje a typy chýb

Chyby matematického modelu - vznikajú nahradením fyzikálnej simulácie matematickým modelom, napr. popis reálneho fyzikálneho javu diferenciálnou rovnicou.

Chyby vstupných dát - nepresnosti pri meraní vstupných fyzikálnych veličín.

Chyby numerickej metódy - vznikajú pri náhrade matematického modelu jednoduchšou numericou úlohou, tj. náhrada nekonečného procesu konečným (konečný počet krokov).

Chyby zaokrúhľovacie - vznikajú zaokrúhľovaním na konečný počet desatinných miest. Tieto chyby sa môžu navzájom rušiť ale i kumulovať, a tým, pri veľkom počte operácií, úplne znehodnotiť výsledok.

11.0.2 Definícia chyby

Definícia 11.0.1 Predpokladajme, že ξ je presné riešenie úlohy, a nech x je jej približné riešenie (aproximácia).

Potom

$$E(x) = \xi - x$$

sa nazýva *absolútna chyba* aproximácie x a

$$RE(x) = \frac{\xi - x}{x}$$

sa nazýva *relatívna chyba* aproximácie x .

R Relatívna chyba aproximácie býva často uvádzaná v percentách.

Nakoľko presnú hodnotu zrejme nepoznáme, majú v numerických modeloch dôležitú úlohu tzv. *odhady chýb*.

Definícia 11.0.2 Nezáporné číslo $ME(x)$ spĺňajúce

$$|\xi - x| \leq ME(x), \text{ resp. } \xi \in \langle x - ME(x); x + ME(x) \rangle$$

sa nazýva *odhad absolútnej chyby* aproximácie x a nezáporné číslo $MR(x)$ spĺňajúce

$$\frac{|\xi - x|}{|x|} \leq MR(x), \quad x \neq 0$$

sa nazýva *odhad relatívnej chyby* aproximácie x .

R Túto skutočnosť označujeme

$$\begin{aligned} \xi &= x \pm ME(x), \\ \xi &= x(1 \pm MR(x)). \end{aligned}$$

11.0.3 Zaokrúhľovanie - zaokrúhľovacie chyby

Definícia 11.0.3 Nech x je reálne číslo s vo všeobecnosti nekonečným dekadickým vyjadrením (napr. iracionálne číslo).

Potom $x^{(d)}$, ktoré má d desatinných miest, je *správne zaokrúhlenou hodnotou* čísla x , ak platí

$$|x - x^{(d)}| \leq \frac{1}{2} 10^{-d}.$$

Zaokrúhľovacia chyba sa počas početných operácií numerického modelu neustále šíri. V lepšom prípade sa tieto chyby v dôsledku navzájom opačných znamienok rušia, ale to však nie je možné nijakým spôsobom zaručiť, a preto predpokladáme horší variant. Ako príklad značného šírenia zaokrúhľovacej chyby môžeme zmieniť operáciu odčítania veľmi blízkych čísel, alebo delenie číslom blízkym nule, atď..

11.1 Podmienenosť numerických úloh a numerická stabilita algoritmov

Riešenie numerických úloh je postup, pri ktorom priraďujeme vstupným údajom výstupné dáta¹.

Ak je toto zobrazenie (priradenie výstupov k vstupom) spojitý hovoríme, že numerická úloha je *korektná úloha*.

¹Black-box systems.

Definícia 11.1.1 Korektná úloha sa nazýva *dobře podmienenou úlohou* práve vtedy, ak platí

$$c_p = \frac{\text{relatívna chyba výstupných dát}}{\text{relatívna chyba vstupných dát}} \approx 1,$$

kde číslo c_p sa nazýva *číslo podmienenosti úlohy*.

Algoritmus málo citlivý na poruchy vstupných údajov sa nazýva *dobře podmienený algoritmus*.
Algoritmus s malým vplyvom zaokrúhlovacích chýb na výsledky nazývame *numericky stabilný algoritmus*.
Dobře podmienený a numericky stabilný algoritmus sa nazýva *stabilný algoritmus*.



Obr. 11.1.1: *Black box system*

12. Numerické riešenie nelineárnej rovnice

V praxi sa často stretávame s problematikou riešenia nelineárnych¹ rovníc

$$f(x) = 0.$$

V tejto kapitole sa budeme zaoberať jednotlivými metódami riešenia týchto rovníc, ich konvergenciou, podmienkami za akých konvergujú alebo divergujú, ako aj samotnou rýchlosťou konvergenzie jednotlivých metód.

Numerickým riešením nelineárnej rovnice budeme mať na mysli hľadanie koreňa rovnice

$$f(x) = 0,$$

na intervale $\langle a, b \rangle$ (tj. hľadanie $\xi \in \langle a, b \rangle$, splňujúce podmienku $f(\xi) = 0$).

Tu treba zdôrazniť, že predpokladáme spojitosť funkcie na intervale $\langle a, b \rangle$ a existenciu jediného koreňa na tomto intervale. Ak tomu tak nie je, treba nájsť podintervaly, na ktorých tomu tak je. To znamená nájsť body nespojitosti a rozdeliť nimi vyšetřovaný interval, resp. *separovať*² jednotlivé korene na intervale $\langle a, b \rangle$.

V ďalšom, preto budeme predpokladať spojitosť funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ a existenciu jediného koreňa na tomto intervale.

12.1 Metóda polenia intervalu (bisekcie)

Jedná sa svojím spôsobom o jednu z najjednoduchších metód. Je založená na známej vete diferenciálneho počtu.

¹Riešenie lineárnych rovníc spadá do oblasti lineárnej algebry, kde sa riešenia hľadajú analytickými metódami.

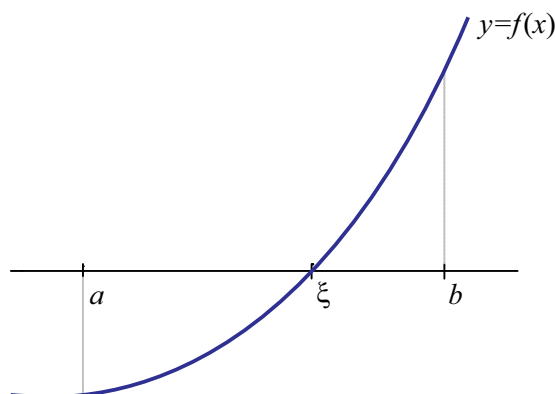
²Proces separácie koreňov je vo všeobecnosti dosť náročná úloha. Samotná myšlienka lokalizácie koreňa je v podstate predmetom tejto kapitoly.

Veta 12.1.1 Nech je funkcia $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ spojitá a nech platí

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Potom na intervale $\langle a, b \rangle$ existuje aspoň jeden koreň rovnice $f(x) = 0$.

R Inak povedané, ak sú znamienka funkčných hodnôt krajných bodov spojitkej funkcie na intervale navzájom opačné, určite musí jej graf aspoň raz preťať os x -ovú.



Obr. 12.1.1: Graf spojitkej funkcie s navzájom opačnými znamienkami funkčných hodnôt krajných bodov intervalu $\langle a, b \rangle$

Prejdime teraz k samotnej metóde polenia intervalu. Tak ako už jej názov napovedá, interval $\langle a, b \rangle$ rozdelíme na dva rovnaké podintervaly, stredovým bodom $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Keďže predpokladáme na intervale $\langle a, b \rangle$ spojitost funkcie a existenciu jediného koreňa, poľahky pomocou predošlej vlastnosti spojitkej funkcie vylúčime podinterval, na ktorom sa koreň nenachádza. Tým nám vznikne polovičný interval, na ktorom postupujeme totožne ako v predošlom kroku. Týmto spôsobom vytvárame iteračnú postupnosť stredov intervalov.

Celý proces tvorby iteračnej postupnosti $\{x_k\}_{k=0}^n$ môžeme schématicky zapísať nasledovne.

Počiatočnú iteráciu zvolíme $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Vyšetříme v ktorom z podintervalov $\langle a, x_0 \rangle$, $\langle x_0, b \rangle$ sa nachádza koreň ξ a zúžime pôvodný interval. To znamená, ak platí $f(a) \cdot f(x_0) < 0$, položíme $b \rightarrow x_0$, v opačnom prípade (tj. $f(a) \cdot f(x_0) > 0$, resp. $f(x_0) \cdot f(b) < 0$), položíme $a \rightarrow x_0$. Vytvoríme takýmto spôsobom nový interval $\langle a_1, b_1 \rangle$. V nasledujúcom kroku pokračujeme analogicky, teda $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, kde krajné body intervalu vznikli posunutím hranice pôvodného intervalu a opäť zúžime aktuálny interval na polovičný totožným postupom. Týmto spôsobom vytvárame iteračnú postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, ktorá za daných podmienok (spojitosť funkcie a existencia jediného koreňa na vyšetrovanom intervale) vždy konverguje k presnému riešeniu ξ .

Pri predom zvolenej presnosti ε práve popísaný iteračný proces ukončíme, ak je presnosť postačujúca³, tj.

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

■ **Príklad 12.1** Metódou polenia intervalu nájdime na intervale $\langle 0; 1 \rangle$ koreň rovnice

$$e^x + x^2 - 3 = 0,$$

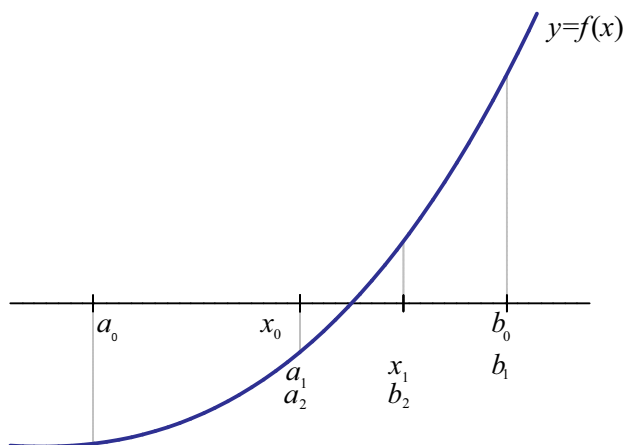
³Rôzne literatúry sa stavajú k problematike presnosti a podmienke ukončenia iteračného procesu inak. Našou snahou bolo, aby táto podmienka bola jednotná pre všetky metódy, vychádzajúc z predpokladu, že iteračná postupnosť konverguje k presnému riešeniu, tj. platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \xi$. Na druhú stranu musíme priznať, že existujú situácie, kedy takéto kritérium nemusí byť postačujúce. V našom kurze sa však s takýmito situáciami nestretneme. Čitateľa však odkážeme na literatúru s hlbším záberom.

s presnosťou $\varepsilon = 0.01$.

Postup zapíšeme do tabuľky, kde si budeme zapisovať jednotlivé hodnoty a_k, b_k, x_k ako aj znamienko funkčnej hodnoty funkcie $f(x) = e^x + x^2 - 3$ v týchto bodoch. Algoritmus si vystačí s funkčnými hodnotami v $f(a_k)$ a $f(b_k)$. Znamienko v $f(b_k)$ uvedieme len pre kontrolu.

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.5	1	—	—	+
1	0.5	0.75	1	—	—	+
2	0.75	0.875	1	—	+	+
3	0.75	0.8125	0.875	—	—	+
4	0.8125	0.84375	0.875	—	+	+
5	0.8125	0.828125	0.84375	—	—	+
6	0.828125	0.8359375	0.84375			

V tomto kroku môžeme algoritmus ukončiť, keďže platí $|x_6 - x_5| = |0.8359375 - 0.828125| \doteq 0.008 < 0.01 = \varepsilon$. Približné riešenie s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ je $x_6 = 0.84$. ■



Obr. 12.1.2: Metóda polenia intervalu (bisekcie)

12.2 Metóda regula falsi

Princíp metódy je podobný algoritmu polenia intervalu, avšak nebudeme daný interval poliť, ale budeme sa k presnému riešeniu bližovať iteratnou postupnosťou tvorenou priesečníkmi funkčných hodnôt krajných bodov intervalu $([a_k; f(a_k)])$ a $([b_k; f(b_k)])$ a osou x -ovou. Tento priesečník vypočítame

$$x_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(b_k).$$

Z intervalov $\langle a_k; x_k \rangle$ a $\langle x_k; b_k \rangle$ vyberieme ten, ktorý obsahuje koreň ξ , tj. ten ktorého krajné funkčné hodnoty majú opačné znamienko.

Ak platí $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$, položíme $a_{k+1} = a_k$ a $b_{k+1} = x_k$.

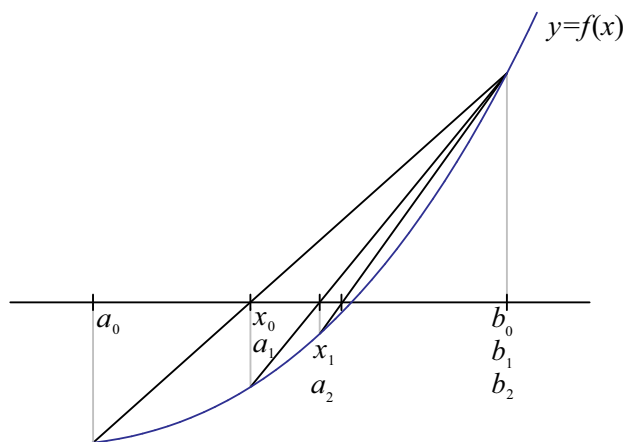
V opačnom prípade, tj. ak platí $f(a_k) \cdot f(x_k) > 0$, položíme $a_{k+1} = x_k$ a $b_{k+1} = b_k$.

Ak bz $f(x_k) = 0$, proces bz sme ukončili, našli sme totiž koreň rovnice.

Celý iteratívny proces ukončíme opäť, ak pre vopred stanovenú presnosť ε , bude platiť

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

Metóda regula falsi je vždy konvergentná pri daných podmienkach (spojitosť funkcie a existencia jediného koreňa na intervale) a vo väčšine prípadov aj rýchlejšie konverguje k presnému riešeniu ako metóda bisekcie.



Obr. 12.2.1: Metóda regula falsi

■ **Príklad 12.2** Metódou regula falsi nájdime na intervale $\langle 0; 1 \rangle$ koreň rovnice

$$e^x + x^2 - 3 = 0,$$

s presnosťou $\varepsilon = 0.01$.

Pre výpočet členov postupnosti použijeme vzorec

$$x_k = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} \cdot f(b_k),$$

teda na ich výpočet potrebujeme konkrétne funkčné hodnoty a nie len znamienka ako v predošlom prípade. Následne hranice intervalu $\langle a_k; b_k \rangle$ posunieme podľa podmienok

$$f(a_k) \cdot f(x_k) < 0, \quad \begin{aligned} a_{k+1} &\rightarrow a_k, \\ b_{k+1} &\rightarrow x_k, \end{aligned}$$

v opačnom prípade, tj.

$$f(a_k) \cdot f(x_k) > 0, \quad \begin{aligned} a_{k+1} &\rightarrow x_k, \\ b_{k+1} &\rightarrow b_k. \end{aligned}$$

Výsledky zapíšeme do tabuľky.

k	a_k	x_k	b_k	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	0	0.73576	1	-2	-0.37159	0.71828
1	0.73576	0.82585	1	-0.37159	-0.03414	0.71828
2	0.82585	0.83375	1	-0.03414	-0.00291	0.71828

Iteračný proces ukončíme, nakoľko platí $|x_2 - x_1| = |0.8338 - 0.8259| = 0.0079 < 0.01 = \varepsilon$, a teda za približné riešenie považujeme hodnotu $x_2 = 0.83$. ■

12.3 Metóda prostej iterácie

Definícia 12.3.1 Nech $g : X \rightarrow X$ je zobrazenie.

Bod ξ nazveme *pevným bodom zobrazenia* g , ak platí

$$g(\xi) = \xi.$$

R Pevný bod funkcie je taký bod (číslo), ktoré sa v zobrazení danom funkciou $g(x)$, zobrazí sám na seba.

Graficky sa jedná o priesečníky grafu funkcie $g(x)$ s osou $y = x$.

Typickým príkladom pevného bodu pre funkciu $g(x) = x^3$ sú body (čísla) $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ a $\xi_3 = 1$:

$$g(\xi_1) = (-1)^3 = -1 = \xi_1,$$

$$g(\xi_2) = 0^3 = 0 = \xi_2,$$

$$g(\xi_3) = 1^3 = 1 = \xi_3.$$

Pevný bod zobrazenia (funkcie) má v numerickej matematike časté využitie. Mnoho úloh sa dá pretransformovať na úlohu hľadania pevného bodu zobrazenia, čím sa dostaneme k iteračnému procesu, ktorý je za istých podmienok konvergentný. O tom za akých podmienok iteračná postupnosť konverguje k pevnému bodu zobrazenia nám napovie nasledujúca veta, všeobecne známa ako Banachova veta o pevnom bode. Predtým si však zdefinujeme ďalšiu dôležitú vlastnosť funkcií.

Definícia 12.3.2 Nech (X, d) je metrický priestor.

Nech je dané zobrazenie $g : A \rightarrow A$, $A \subset X$.

Toto zobrazenie sa nazýva *kontraktívne zobrazenie*, ak existuje reálna konštanta $0 < q < 1$ taká, že $\forall x_1, x_2 \in A$ platí

$$d(g(x_1), g(x_2)) \leq q \cdot d(x_1, x_2).$$

R Funkcia je kontraktívna vtedy a len vtedy, keď spĺňa Lipschitzovu podmienku pre $0 < q < 1$.

Veta 12.3.1 — Banachova veta o pevnom bode. Nech (X, d) je úplný metrický priestor.

Nech $g : X \rightarrow X$ je kontraktívne zobrazenie.

Potom pre toto zobrazenie existuje iba jeden pevný bod $\xi = g(\xi)$.

A tiež pre každé $x \in X$ platí

$$g_k(x) \rightarrow \xi, \quad k \rightarrow \infty,$$

kde symbol $g_k(x)$ predstavuje k -tú iteráciu zobrazenia g , pričom pre rýchlosť konvergenzie tejto iterácie platí

$$d(\xi, g_k(x)) \leq q^k \cdot d(\xi, x).$$

R Banachov⁴ vetu sme uviedli v jej všeobecnejšom tvare, tj. pre akékoľvek zobrazenie definované na úplnom metrickom systéme, nie len pre funkciu jednej reálnej premennej, pretože v ďalšom budeme pri konvergentnom iteračnom procese mať na mysli kontraktívne zobrazenie s jediným pevným bodom.

⁴Stefan Banach (* 30. 3. 1892, Krakov – † 31. 8. 1945, Lvov) bol poľský matematik, jeden z patrónov Lvovskej školy matematiky v predvojnovom Poľsku.

Z vyššie uvedeného vyplýva, že si úlohu nájdenia koreňa ξ rovnice

$$f(x) = 0$$

transformujeme na tvar

$$x = g(x)$$

a budeme hľadať pevný bod ξ funkcie $g(x)$.

Ak je funkcia na hľadanom intervale kontraktívna existuje na ňom jediný jej pevný bod. Túto podmienku zaistíme nasledujúcou vetou.

Veta 12.3.2 Nech funkcia $g(x)$ zobrazuje interval $\langle a; b \rangle$ do seba a má na tomto intervale deriváciu. Potom, ak existuje číslo $q \in (0; 1)$, že platí

$$|g'(x)| \leq q, \quad \forall x \in \langle a; b \rangle,$$

existuje na intervale $\langle a; b \rangle$ jediný pevný bod ξ funkcie $g(x)$, tak potom iteračná postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^n$ definovaná vzťahom

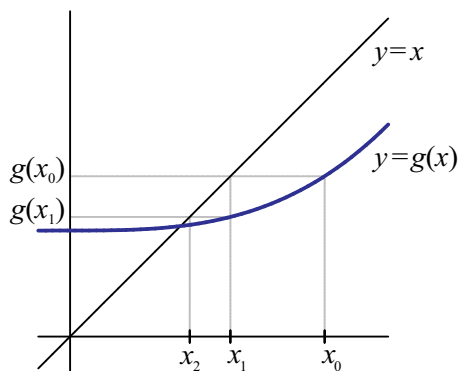
$$x_{k+1} = g(x_k)$$

konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $x_0 \in \langle a; b \rangle$.

Pre odhad chyby platí

$$|x_{k+1} - \xi| \leq \frac{q}{1-q} |x_{k+1} - x_k|,$$

$$|x_{k+1} - \xi| \leq \frac{q^{k+1}}{1-q} |x_1 - x_0|.$$



Obr. 12.3.1: Metóda prostej iterácie konverguje (funkcia je kontraktívna)

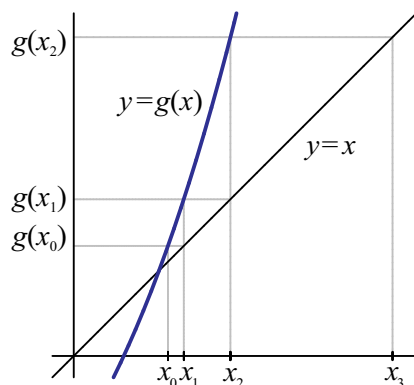


Predošlé odhady chyby sú, z dôvodu obtiažnosti nájdenia koeficientu q , nepraktické. Iteračný proces preto ukončíme, ak pre vopred stanovenú presnosť ε , bude platiť

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

■ **Príklad 12.3** Metódou prostej iterácie nájdime s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ na intervale $\langle -2; -1 \rangle$ koreň rovnice

$$e^x + x^2 - 3 = 0.$$



Obr. 12.3.2: Metóda prostej iterácie diverguje (funkcia nie je kontraktívna)

Zadanú rovnicu si upravíme na vhodný tvar s ohľadom na skutočnosť, že hľadáme záporný koreň

$$\begin{aligned} e^x + x^2 - 3 &= 0, \\ x^2 &= 3 - e^x, \\ x &= \pm\sqrt{3 - e^x}. \end{aligned}$$

Budeme hľadať pevný bod funkcie

$$g(x) = -\sqrt{3 - e^x}.$$

Overíme podmienku pre konvergenciu iteračnej postupnosti $x_{k+1} = g(x_k)$ k pevnému bodu ξ funkcie $g(x)$. Jej derivácia je

$$g'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{3 - e^x}}.$$

Nájdeme maximum $|g'(x)|$ na intervale $\langle -2; -1 \rangle$. Na tomto intervale platí

$$g''(x) = \frac{e^x(6 - e^x)}{4(3 - e^x)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

a teda funkcia $g'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{3 - e^x}}$ je na tomto intervale rastúca a maximum nadobúda v pravom krajnom bode intervalu $\langle -2; -1 \rangle$, tj.

$$g'(-1) = \frac{e^{-1}}{2\sqrt{3 - e^{-1}}} \leq 0.12 = q < 1.$$

Overíme ešte, či sa funkcia zobrazuje na intervale $\langle -2; -1 \rangle$ sama do seba. Keďže je na tomto intervale monotónna, stačí overiť, či sa zobrazia krajné body intervalu $\langle -2; -1 \rangle$ do tohto intervalu

$$\begin{aligned} g(-2) &= -\sqrt{3 - e^{-2}} \doteq -1.69 \in \langle -2; -1 \rangle, \\ g(-1) &= -\sqrt{3 - e^{-1}} \doteq -1.62 \in \langle -2; -1 \rangle. \end{aligned}$$

Keďže je konvergencia zaručená pre ľubovoľné $x_0 \in \langle -2; -1 \rangle$, zvolíme si napríklad $x_0 = -2$ a podľa iteračného vzťahu

$$g(x_{k+1}) = -\sqrt{3 - e^{x_k}}$$

dostaneme nasledujúce členy postupnosti iteračná postupnosť $\{x_k\}_{k=0}^n$

$$x_0 = -2.00000,$$

$$x_1 = -1.69253,$$

$$x_2 = -1.67808,$$

$$x_3 = -1.67728.$$

Proces ukončíme, nakoľko platí $|x_3 - x_2| = |-1.67728 + 1.67808| = 0.0008 < 0.01 = \varepsilon$ a približným riešením je $x_3 = -1.68$. Čo je nielen odhad hodnoty pevného bodu funkcie $g(x) = -\sqrt{3 - e^x}$ ale zároveň aj koreň rovnice $e^x + x^2 - 3 = 0$ s presnosťou $\varepsilon = 0.01$. ■

12.4 Metóda sečníc

Vychádzajúc z metódy regula falsi, označíme krajné body intervalu $x_0 = a$ a $x_1 = b$. Bodmi $[x_0; f(x_0)]$ a $[x_1; f(x_1)]$ vedieme sečnicu s osou x -ovou, priesečník označíme x_2 . Nevyberáme však teraz interval obsahujúci koreň, ale rovno vedieme ďalšiu sečnicu bodmi $[x_1; f(x_1)]$ a $[x_2; f(x_2)]$ a jej priesečník s osou x -ovou označíme x_3 . A následne pokračujeme analogicky sečnicou osi x -ovej bodmi $[x_2; f(x_2)]$ a $[x_3; f(x_3)]$, atď..

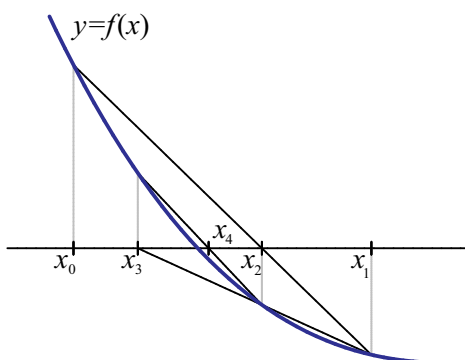
Celý algoritmus môžeme zhrnúť do iteračného dvoj krokého vzťahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde $x_0 = a$ a $y_0 = b$.

Iteračný proces ukončíme opäť, ak bude platiť

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

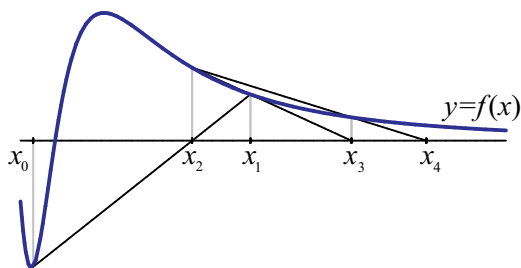


Obr. 12.4.1: Metóda sečníc konverguje

R Metóda sečníc je viackrokovou metódou, tj. na výpočet nasledujúcej hodnoty x_{k+1} potrebujeme dva predošlé členy iteračnej postupnosti x_k, x_{k-1} . Preto aj počiatočná aproximácia je dvojica x_0, x_1 , ktorú zväčša položíme rovnú krajným bodom intervalu $\langle a; b \rangle$.

■ **Príklad 12.4** Metódou sečníc riešme s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ na intervale $\langle -2; -1 \rangle$ rovnicu

$$e^x + x^2 - 3 = 0.$$



Obr. 12.4.2: Metóda sečníc diverguje

Za prvotné aproximácie si zvolíme krajné body intervalu, tj. $x_0 = -2$ a $x_1 = -1$. Ďalšie členy iteračnej postupnosti vypočítame podľa iteračného vzťahu

$$\begin{aligned}x_2 &= -1.5898, \\x_3 &= -1.7060, \\x_4 &= -1.6763, \\x_5 &= -1.6772.\end{aligned}$$

Kedže platí $|x_5 - x_4| = |-1.6772 - (-1.6763)| = 0.0009 < \varepsilon$, približné riešenie rovnice je $x_5 = -1.68$.

■

12.5 Newtonova metóda dotyčníc

Máme riešiť rovnicu

$$f(x) = 0.$$

Prenásobíme túto rovnicu diferencovateľnou funkciou $g(x)$ (nateraz bližšie neurčenou) a upravíme na tvar vhodný pre iteráciu

$$x = x + g(x) \cdot f(x),$$

túto rovnosť si prepíšeme ako iteračnú funkciu

$$\varphi(x) = x + g(x) \cdot f(x)$$

kde si funkciu $g(x)$ volíme tak, aby metóda čo najrýchlejšie konvergovala k presnému riešeniu, tj. aby $\varphi'(x)$ bolo v okolí koreňa ξ blízke nule (podmienka konvergence iteračnej funkcie je $|\varphi'(x)| < q$, kde $q \in \langle 0; 1 \rangle$, čo je priamy dôsledok Banachovej vety o pevnom bode), a teda

$$\varphi'(x) = 1 + \underbrace{g'(x) \cdot f(x)}_{=0} + g(x) \cdot f'(x) = 0.$$

Kedže riešime rovnicu $f(x) = 0$, druhý sčítanec je nulový a dostávame

$$1 + g(x) \cdot f'(x) = 0,$$

odkiaľ

$$g(x) = \frac{-1}{f'(x)}$$

Iteračná funkcia má teda tvar

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Iteračný vzťah Newtonovej⁵ metódy dotyčníc má tvar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

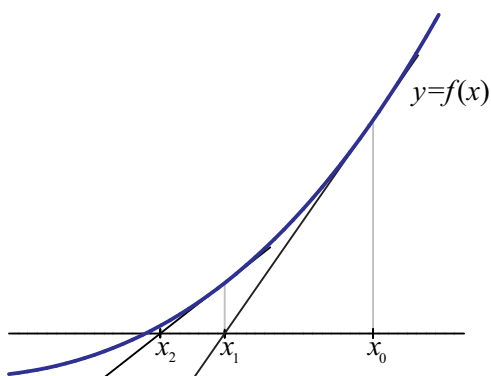
a ukončíme ho opäť, ak bude platiť

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon.$$

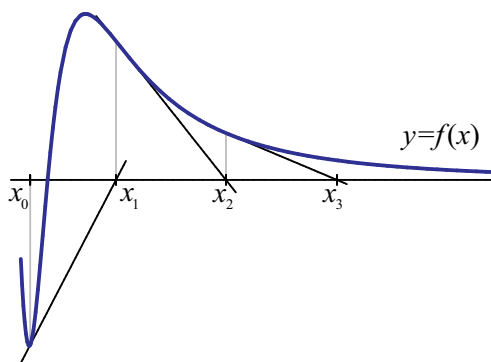
R Dotyčnica grafu funkcie má tvar

$$y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k).$$

Pre $y = 0$ dostaneme práve vzťah Newtonovej metódy.



Obr. 12.5.1: Newtonova metóda konverguje



Obr. 12.5.2: Newtonova metóda diverguje

⁵Sir Isaac Newton, prezident Kráľovskej spoločnosti (* 4. 1. 1643, Woolsthorpe-by-Colsterworth – † 31. 3. 1727, Kensington) bol anglický fyzik, matematik a filozof. Založil infinitezimálny počet a formuloval prvú teóriu sily a gravitácie. Jeho objavy v matematike, optike a mechanike položili základy pre modernú fyziku.

Veta 12.5.1 — Fourierova podmienka. Nech v intervale $\langle a; b \rangle$ leží jediný koreň rovnice $f(x) = 0$ a nech $f'(x)$ a $f''(x)$ sú spojité a nemenia znamienko na intervale $\langle a; b \rangle$. Ak zvolíme počiatočnú aproximáciu $x_0 \in \langle a; b \rangle$ a platí

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,$$

potom pre túto aproximáciu Newtonova metóda konverguje.

■ **Príklad 12.5** Newtonovou metódou dotyčníc riešme s presnosťou $\varepsilon = 0.01$ na intervale $\langle -2; -1 \rangle$ rovnicu

$$e^x + x^2 - 3 = 0.$$

Zrejme platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + 2x, \\ f''(x) &= e^x + 2 \end{aligned}$$

a je jasné, že na celom intervale $\langle -2; -1 \rangle$ je $f'(x) < 0$ a $f''(x) > 0$, a teda prvá ani druhá derivácia nemenia na danom intervale znamienko. Keďže platí

$$\begin{aligned} f(-2) &= e^{-2} + (-2)^2 - 3 > 0, \\ f(-1) &= e^{-1} + (-1)^2 - 3 < 0, \end{aligned}$$

zvolíme za počiatočnú aproximáciu $x_0 = -2$, aby platila Fourierova podmienka. Preto

$$\begin{aligned} x_0 &= -2, \\ x_1 &= -1.7062, \\ x_2 &= -1.6775, \\ x_3 &= -1.6772. \end{aligned}$$

Keďže platí $|x_3 - x_2| = |-1.6772 - (-1.6775)| = 0.0003 < \varepsilon$, za približné riešenie rovnice považujeme $x_3 = -1.68$. ■

13. Numerické riešenie nelineárnych systémov

Sústavou nelineárnych¹ rovníc máme na mysli systém

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \text{ resp.}$$
$$\mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Hľadáme riešenie, tj. taký vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, pre ktorý platí

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Uvažujme Taylorov rozvoj i -tej funkcie sústavy, pre ktorú zrejme platí

$$f_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \delta x_j + \Theta(\delta\mathbf{x}^2, \delta\mathbf{x}^3, \dots).$$

Členy s druhou a vyššou deriváciou zanedbáme (tj. $\Theta(\delta\mathbf{x}^2, \delta\mathbf{x}^3, \dots) = 0$) a bude platiť odhad

$$f_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \approx f_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \delta x_j.$$

¹Riešeniu sústav lineárnych rovníc sa venuje nasledujúca kapitola.

A celkovo teda vo vektorovom zápise môžeme písať

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_{1n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_{1n}} \end{pmatrix}}_{\text{ozn. } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{x},$$

kde

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_{1n}} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_{1n}} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_{1n}} \end{pmatrix}$$

sa nazýva *Jacobiho matica*².

Ak položíme

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = 0,$$

dostávame

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Vyjadríme si $\delta \mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \underbrace{\left(\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right)}_{=0}, \\ \delta \mathbf{x} &= -J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad / + \mathbf{x} \\ \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} &= \mathbf{x} - J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

iteračná postupnosť ma vo vektorovom zápise tvar

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

alebo

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \delta \mathbf{x},$$

kde

$$\delta \mathbf{x} = -J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Vyššie popísaná metodika riešenia nelineárnych sústav sa niekedy označuje aj ako *Newton-Raphsonova metóda*.

²Carl Gustav Jacob Jacobi (* 10. 12. 1804, Postupim, Nemecko, vtedy Prusko - † 18. 2. 1851, Berlín) bol významný nemecký (pruský) matematik židovského pôvodu. Zaoberal sa viacerými oblasťami teoretickej aj aplikovanej matematiky, napr. matematickou analýzou (parciálne derivácie, diferenciálne rovnice), lineárnou algebrou, teóriou čísel, či analytickou mechanikou.

- R** V prípade systému m rovníc o n neznámych ($m > n$) neexistuje inverzná matica $J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x})$, a preto použijeme tzv. pseudoinverznú maticu

$$J^- = (J^T J)^{-1} J^T.$$

- R** V prípade neexistencie parciálnych derivácií podľa j -tej premennej, môžeme túto nahradiť odhadom

$$J_{ij} \approx \frac{f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_j^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k)}) - f_i(x_1^{(k)}, \dots, x_j^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}{x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}}.$$

Týmto spôsobom dostávame tzv. *zovšeobecnenú metódu sečníc*.

■ **Príklad 13.1** Riešme sústavu rovníc s presnosťou $\varepsilon = 0.01$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 1 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Uurčíme Jacobiho maticu

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

a zvolíme si počiatočnú aproximáciu

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.8 \end{pmatrix}.$$

Potom dostávame

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) &= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 - 1.8 + 1 \\ 0.8^2 + 1.8^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.12 \end{pmatrix}, \\ J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 \cdot 0.8 & 2 \cdot 1.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1.6 & 3.6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

odkiaľ

$$J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0.6923 & 0.1923 \\ -0.3077 & 0.1923 \end{pmatrix}.$$

Uurčíme diferenciu

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= -J_{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\begin{pmatrix} 0.6923 & 0.1923 \\ -0.3077 & 0.1923 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0.12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.0231 \\ 0.0231 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A nasledujúci člen iteračnej postupnosti je

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1.8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0231 \\ 0.0231 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8231 \\ 1.8231 \end{pmatrix}.$$

Takto by sme pokračovali aj v nasledujúcich krokoch a celkovo dostávame

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0.8	1.8
1	0.8231	1.8231
2	0.8229	1.8229

Iteračný proces ukončíme a zapíšeme približné riešenie s presnosťou na dve desatinné miesta

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.82 \\ 1.82 \end{pmatrix}.$$

■

14. Numerické riešenie sústav lineárnych rovníc

Sústavou n lineárnych rovníc o n neznámych (a tými sa budeme výhradne zaoberať) rozumieme systém

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2, \\&\dots \\a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n &= b_n.\end{aligned}\tag{14.0.1}$$

Tento systém môžeme reprezentovať maticovou rovnicou

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\tag{14.0.2}$$

kde $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je matica sústavy, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je stĺpcový vektor neznámych a $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ je

stĺpcový vektor pravých strán.

Definícia 14.0.1 Vektor ξ sa nazýva riešenie systému (14.0.1), práve vtedy, ak vyhovuje maticovej rovnici (14.0.2), tj. platí

$$A\xi = \mathbf{b}.$$

R Z predošlých kurzov lineárnej algebry je nám známe, že existuje práve jedno riešenie $\mathbf{x}_0$ systému (14.0.1), a to iba v prípade že, existuje inverzná matica A^{-1} ku štvorcovej matici systému A , a tá existuje iba vtedy, ak je matica A regulárna, tj. $\det A \neq 0$, resp. hodnota matice A je rovná jej stupňu n , $h(A) = n$.

R V zásade rozlišujeme dva typy metód riešenia sústav lineárnych rovníc

1. *Priame metódy riešenia* - výpočet riešenia pomocou priamej metódy nie je zatažený nijakými systémovými chybami metódy (nehľadáme približné riešenie). Výsledok je ovplyvnený iba chybami zaokrúhľovania.
2. *Nepriame (iteračné) metódy riešenia* - výsledkom je približné riešenie zatažené nielen zaokrúhľovacími chybami, ale aj systémovými chybami metódy.

14.1 Cramerovo pravidlo

Cramerovo pravidlo je známa metóda riešenia sústav lineárnych rovníc. Spočíva v priradení jednotlivým zložkám riešenia x_i príslušné podiely determinantu matice vzniknutej nahradením príslušného i -tého stĺpca matice sústavy stĺpcom pravých strán $\mathbf{b}$ a determinantu samotnej matice sústavy A .

Veta 14.1.1 Nech D je determinant matice sústavy. Nech D_i je determinant matice, ktorá vznikla z matice sústavy nahradením i -tého stĺpca vektorom pravej strany. Riešením sústavy (14.0.2) je vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, kde

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad \text{kde } i = 1, 2, \dots, n.$$

■ **Príklad 14.1** Pomocou Cramerovho pravidla riešme sústavu lineárnych rovníc

$$6x + 3y - 2z = 2,$$

$$x - 3y + 2z = 5,$$

$$2x + y + z = 9.$$

Matrica sústavy a vektor pravých strán majú tvar

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice sústavy je (nenulový, tj. matrica je regulárna)

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35.$$

Príslušné determinanty D_i sú

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -35,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -70,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -175.$$

Riešením je vektor

$$\mathbf{x} = (x, y, z)^T = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \frac{D_3}{D} \right)^T = \left(\frac{-35}{-35}, \frac{-70}{-35}, \frac{-175}{-35} \right)^T = (1, 2, 5)^T.$$

■

Cramerovo pravidlo má svoje opodstatnenie pri riešení sústav s malým počtom neznámych a rovníc, kedy vieme jednotlivé determinanty ľahko určiť, resp. použitím vhodného softwareového riešiča na určenie hodnôt determinantu. Je však na uváženie, či použitím výpočtovej techniky, nie je vhodnejšie využiť sofistikovanejšie, alebo lepšie povedané, optimálnejšie metódy hľadania riešenia lineárnych sústav, viď nižšie.

14.2 Gaussova eliminačná metóda

Gaussova eliminačná metóda riešenia sústavy je založená na tom, že sústavu lineárnych rovníc $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ prevedieme (pomocou troch ekvivalentných maticových operácií) na ekvivalentnú sústavu rovníc $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde matica C je hornotrojuholníková matica. Z tohto tvaru vieme spätnou transformáciou nájsť presné riešenie sústavy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Nech je daná sústava $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tj.

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2, \\ &\dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Použijúc algoritmus

```
for j = 2 : n
  for i = j : n
    m = (ai,j-1) / (aj-1,j-1);
    ai,j = ai,j - aj-1,j * m;
    bi,j = bi - bj-1 * m;
  end
end
```

dostávame sústavu v tvare

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n &= b_1, \\ a_{2,2}^{(1)}x_2 + a_{2,3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2,n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ a_{3,3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3,n-1}^{(2)}x_{n-1} + a_{3,n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)}, \\ &\vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-2)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)}x_n &= b_{n-1}^{(n-2)}, \\ a_{n,n}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Teda tvar $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, kde matica $C = \{a_{ij}^{(k)}\}_{i=j}^n$ je hornotrojuholníková matica ($a_{ij}^{(k)} = 0$, pre $i > j$) vzniknutá konečným počtom elementárnych riadkových operácií algoritmu aplikovaných na pôvodnú maticu A , z ktorého spätnou transformáciou dostaneme presné riešenie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

```
xn = (bn) / (an,n(n-1));
for j = n - 1 : -1 : 1
  xj = (bj - ∑i=j+1n aj,i · xi) / aj,j;
end
```

■ **Príklad 14.2** Gaussovou eliminačnou metódou riešime lineárnu sústavu

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6,$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 0,$$

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 2.$$

Sústavu prevedieme na rozšírený maticový tvar a upravujeme ju na hornotrojuholníkový tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 6 \\ 1 & -1 & 5 & | & 0 \\ 4 & 1 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(\frac{1}{2}) \cdot \text{I.} \\ -(\frac{4}{2}) \cdot \text{I.} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 6 \\ 0 & -3 & 6 & | & -3 \\ 0 & -7 & 2 & | & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(\frac{-7}{-3}) \cdot \text{II.} \end{matrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & | & 6 \\ 0 & -3 & 6 & | & -3 \\ 0 & 0 & -12 & | & -3 \end{pmatrix}$$

Odkiaľ ľahko spätnou transformáciou dostaneme presné riešenie

$$-12x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4},$$

$$-3x_2 + 6x_3 = -3 \Rightarrow x_2 = (-3 - 6x_3) / (-3) = \frac{3}{2},$$

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \Rightarrow x_1 = (6 - (4x_2 - 2x_3)) / 2 = \frac{1}{4}.$$

Riešením je vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4} \right)^T.$$

■

Samozrejme v praxi sa skoro vôbec nevyskytujú sústavy s celočíselnými koeficientami. Samotné výpočty prenechávame na výpočtovú techniku, pričom pripúšťame zaokrúhľovacie chyby. Príklad sme uviedli len pre názornosť algoritmu.

R Všimnime si, že v predošlom algoritme sa vyskytuje viackrát delenie diagonálnym prvkom matice. Je samozrejmé, že v prípade prvkov hlavnej diagonály blízkych k číslu nula, je daný algoritmus silne citlivý na zaokrúhľovanie. Preto je vhodné dbať na to, aby sme výskytu takýchto hodnôt počas výpočtu zamedzili. Takýto postup sa nazýva *čiasťový (resp. úplný) výber hlavného prvku*.

Aby sme teda minimalizovali zaokrúhľovacie chyby, je vhodné vyberať za hlavné prvky (pivoty) $a_{j,j}^{(k)}$, také prvky upravenej matice sústavy, ktoré majú čo najväčšiu absolútnu hodnotu. Chyba sa v takomto prípade pri ďalších násobeniach ďalej nezväčšuje. Ak vyberáme v danej fáze hlavný prvok zo všetkých prvkov, ktoré prichádzajú do úvahy, hovoríme o algoritme s úplným výberom hlavného prvku. Ak vyberáme hlavný prvok len z niektorých prvkov (napr. len z jedného riadku alebo stĺpca matice) hovoríme o algoritme s čiastočným výberom hlavného prvku.

R Pre sústavu n lineárnych rovníc je celkový počet operácií delenia $n(n+1)/2$, počet operácií násobenia pri doprednej eliminácii je $n(n+1)(n-1)/3$, pri spätnej transformácii je počet operácií násobeniav $n(n-1)/2$. Teda celkový počet operácií je potom

$$n(n+1)/2 + n(n+1)(n-1)/3 + n(n-1)/2 = \frac{1}{3}n(n^2 + 3n - 1).$$

Pre dostatočne veľké n je tento počet operácií približne daný

$$\Sigma \approx \frac{n^3}{3}.$$

14.3 Riešenie lineárnych sústav pomocou inverznej matice

Ďalšia priama metóda riešenia sústavy lineárnych rovníc je založená na riešení maticovej rovnice, tj.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \quad / A^{-1} \text{ (násobenie sprava)} \\ \mathbf{x} &= A^{-1} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Na prvý pohľad jednoduché riešenie v sebe ukrýva zásadný problém, a to problém hľadania inverznej matice. Z kurzov algebry vieme, že existujú v zásade dva spôsoby hľadania inverznej matice, a to pomocou algebraických doplnkov a úpravou elementárnymi úpravami. Oba spôsoby sú defacto založené na algoritmoch už spomenutých metód Cramerovho pravidla a Gaussovej eliminačnej metódy. Z výpočtovej techniky je známy príkaz z praxe prostredia MatLab $\mathbf{x} = A \backslash \mathbf{b}$.

14.4 LU rozklad

V nasledujúcich častiach sa budeme zaoberať rozkladmi matíc súčiny matíc, v zásade sa bude vždy jednať o rozklad na súčin typu

$$A = L \cdot D \cdot U,$$

kde L je dolnotrojuholníková matica (lower-triangular matrix), D je diagonálna matica (niekedy budú diagonálne identicky rovné 1, a teda sa D bude identická matica I) a U je hornotrojuholníková matica (upper-triangular matrix). Rozklady matíc by si zaiste zaslúžili samostatnú kapitolu v akomkoľvek študijnom texte, keďže však v našom prípade sa zaoberáme najmä ich využitím pri riešení sústav lineárnych rovníc obmedzíme sa na ich stručný popis potrebný pre naše účely s tým, že sa odkážeme na mnohé iné rozsiahlejšie texty z oblasti lineárnej algebry.

LU rozklad je rozklad regulárnej štvorcovej matice na súčin

$$A = L \cdot U,$$

kde L je dolnotrojuholníková matica a U je hornotrojuholníková matica.

Ak sú prvky na hlavnej diagonále matice L rovné 1, hovoríme o tzv. *Doolittleov rozklad*.

Ak sú prvky na hlavnej diagonále matice U rovné 1, hovoríme o tzv. *Croutov rozklad*.

My sa budeme zaoberať Doolittleovým rozkladom, a teda hlavná diagonála matice L je rovná jednotkovej matici a hlavná diagonála matice U má aspoň jeden nenulový prvok, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

LU rozklad zverejnil v roku 1948 britský matematik Alan Turing¹. Algoritmus hľadania koeficientov matice L a U je založený na úprave matice sústavy na hornotrojuholníkový tvar (matice U) a súčasná úprava jednotkovej matice I na dolnotrojuholníkový tvar (matice L). Vo všeobecnosti ho definujeme nasledovne

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{k,j} \cdot l_{i,k}, \\ l_{i,j} &= \frac{1}{u_{i,i}} \cdot \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} u_{k,j} \cdot l_{i,k} \right). \end{aligned}$$

¹ Alan Mathison Turing (* 23. jún. 1912, Londýn – † 7. jún. 1954, Wilmslow) bol britský matematik, logik, kryptograf a vojnový hrdina.

V prípade matice typu $[3, 3]$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix},$$

je tento postup nasledujúci a môžeme písať

$$\begin{aligned} l_{1,1} &= 1 & u_{1,1} &= a_{1,1}, \\ l_{2,2} &= 1 & u_{1,2} &= a_{1,2}, \\ l_{3,3} &= 1 & u_{1,3} &= a_{1,3}, \\ l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{u_{1,1}}, & u_{2,2} &= a_{2,2} - u_{1,2} \cdot l_{2,1}, \\ l_{3,1} &= \frac{1}{u_{1,1}} \cdot a_{3,1}, & u_{2,3} &= a_{2,3} - u_{1,3} \cdot l_{2,1}, \\ l_{3,2} &= \frac{1}{u_{2,2}} \cdot (a_{3,2} - u_{1,2} \cdot l_{3,1}), & u_{3,3} &= a_{3,3} - (u_{1,3} \cdot l_{3,1} + u_{2,3} \cdot l_{3,2}). \end{aligned}$$

■ **Príklad 14.3** Nájdime LU rozklad matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix}.$$

Najskôr si predpripravíme matice L a U v požadovanom tvare

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice U vznikne ekvivalentnými úpravami z matice A , tj.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{2} \\ \frac{6}{2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{I}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix} - 2 \cdot \mathbf{I}, \\ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix} - 3 \cdot \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Upravíme čiastočne maticu A na čiastkový tvar matice U a podľa definície vpíšeme aj do matice L násobiteľ príslušných riadkov matice A na patričné pozície (samozrejme s opačným znamienkom). V úprave následne pokračujeme a eliminujeme prvok $u_{3,2} = 12$, čím zároveň doplníme posledný chýbajúci prvok matice L

$$\begin{aligned} U^* &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \boxed{12} & \mathbf{32} \end{pmatrix} - \left(\frac{12}{3} = 4\right) \cdot \mathbf{II}, & L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}, & L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \mathbf{4} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

R LU rozklad je operačne rovnako náročný ako Gaussova eliminačná metóda, pretože používame tie isté operácie. Čiže pre dostatočne veľké sústavy ($n \gg 1$) môžeme písať

$$\Sigma \approx \frac{n^3}{3}.$$

Pomocou LU rozkladu môžeme riešiť sústavu lineárnych rovníc nasledujúcim spôsobom. Pôvodný systém

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

prepíšeme pomocou rozkladu ako

$$\underbrace{L U}_{\mathbf{y}} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

označíme

$$U \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

ktorú spätnou transformáciou ľahko vyriešime, keďže matica U je hornotrojuholníková matica. Riešenie $\mathbf{y}$ získame riešením sústavy

$$L \mathbf{y} = \mathbf{b},$$

ktorú riešime doprednou transformáciou, keďže matica L je hornotrojuholníková matica.

■ **Príklad 14.4** Pomocou LU rozkladu riešme sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Maticu sústavy rozložíme na LU rozklad

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -(4) \cdot \mathbf{I}. \\ -(3) \cdot \mathbf{I}. \end{array} \\ U &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -(-2) \cdot \mathbf{II}. \end{array}, \\ U &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Riešime

$$L \mathbf{y} = \mathbf{b},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Odkiaľ dostávame

$$\begin{aligned} y_1 &= 1, \\ y_2 &= 6 - 4 \cdot 1 = 2, \\ y_3 &= 4 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5. \end{aligned}$$

Čiže riešenie dostávame zo sústavy

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Teda

$$x_3 = -\frac{1}{2},$$

$$x_2 = -\left(2 + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Riešením je vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = \left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T.$$

■

14.5 Choleskyho rozklad

Veta 14.5.1 Ak A je symetrická, pozitívne definitná matica, potom existuje dolnotrojuholníková matica L s kladnými diagonálnymi prvkami taká, že platí

$$A = L \cdot L^T.$$

Tento rozklad sa nazýva Choleskyho^a rozklad a platí

$$l_{j,j} = \sqrt{a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{j,k}^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$l_{i,j} = \frac{1}{l_{j,j}} \cdot \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} \cdot l_{j,k} \right), \quad i = j+1, j+2, \dots, n,$$

^a André-Louis Cholesky - francúzsky dôstojník a matematik.

Definícia 14.5.1 Matica A sa nazýva pozitívne definitná práve vtedy, ak pre každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} > 0.$$

Veta 14.5.2 Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

1. Matica A je pozitívne definitná.
2. Všetky vlastné čísla matice A sú kladné.
3. Existuje Choleskyho rozklad $A = L \cdot L^T$.

■ **Príklad 14.5** Nájdime Choleskyho rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Jednotlivé koeficienty určíme pomocou definície Choleskyho rozkladu

$$\begin{aligned}
 l_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{25} = 5, \\
 l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}} = \frac{15}{5} = 3, \\
 l_{2,2} &= \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = \sqrt{18 - 3^2} = \sqrt{9} = 3, \\
 l_{3,1} &= \frac{a_{3,1} - 0}{l_{1,1}} = \frac{-5}{5} = -1, \\
 l_{3,2} &= \frac{a_{3,2} - l_{2,1} \cdot l_{3,1}}{l_{2,2}} = \frac{0 - 3 \cdot (-1)}{3} = 1, \\
 l_{3,3} &= \sqrt{a_{3,3} - l_{3,1}^2 - l_{3,2}^2} = \sqrt{11 - (-1)^2 - 1^2} = \sqrt{9} = 3.
 \end{aligned}$$

Choleskyho rozklad matice A je

$$\begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

■

■ **Príklad 14.6** Nájdime Choleskyho rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 l_{1,1} &= \sqrt{a_{1,1}} = \sqrt{16} = 4, \\
 l_{2,1} &= \frac{a_{2,1}}{l_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1, \\
 l_{2,2} &= \sqrt{a_{2,2} - l_{2,1}^2} = \sqrt{10 - 1^2} = \sqrt{9} = 3, \\
 l_{3,1} &= \frac{a_{3,1} - 0}{l_{1,1}} = \frac{4}{4} = 1, \\
 l_{3,2} &= \frac{a_{3,2} - l_{2,1} \cdot l_{3,1}}{l_{2,2}} = \frac{4 - 1 \cdot 1}{3} = 1, \\
 l_{3,3} &= \sqrt{a_{3,3} - l_{3,1}^2 - l_{3,2}^2} = \sqrt{6 - 1^2 - 1^2} = \sqrt{4} = 2, \\
 l_{4,1} &= \frac{a_{4,1} - 0}{l_{1,1}} = \frac{-4}{4} = -1, \\
 l_{4,2} &= \frac{a_{4,2} - l_{2,1} \cdot l_{4,1}}{l_{2,2}} = \frac{2 - 1 \cdot (-1)}{3} = 1, \\
 l_{4,3} &= \frac{a_{4,3} - l_{3,1} \cdot l_{4,1} - l_{3,2} \cdot l_{4,2}}{l_{3,3}} = \frac{-2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1}{2} = -1, \\
 l_{4,4} &= \sqrt{a_{4,4} - l_{4,1}^2 - l_{4,2}^2 - l_{4,3}^2} = \sqrt{4 - 1^2 - 1^2 - 1^2} = \sqrt{1} = 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 10 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

14.6 Singulárny rozklad matice

Veta 14.6.1 Každá regulárna matica A typu $[m, n]$ je rozložiteľná na súčin troch matíc

$$A_{m,n} = U_{m,m} \cdot S_{m,n} \cdot V_{n,n}^T,$$

kde matica $U_{m,m}$ je ortonormálna matica ($U^T \cdot U = I$), ktorej stĺpce sú vlastné vektory prislúchajúce k vlastným číslam matice $A \cdot A^T$ v zostupnom poradí, matica $V_{n,n}$ je ortonormálna matica ($V^T \cdot V = I$), ktorej stĺpce sú vlastné vektory prislúchajúce k vlastným číslam matice $A^T \cdot A$ v zostupnom poradí a matica S je diagonálna matica obsahujúca druhé odmocniny vlastných čísel matice U , resp. V , v zostupnom poradí.

■ **Príklad 14.7** Nájdime singulárny rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nájdeme maticu U .

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Nájdeme vlastné čísla a k nim prislúchajúce vlastné vektory tejto matice.

$$[(A \cdot A^T) - \lambda \cdot I] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

zrejme to platí pre

$$\begin{aligned} \det[(A \cdot A^T) - \lambda \cdot I] &= 0, \\ \begin{vmatrix} (11 - \lambda) & 1 \\ 1 & (11 - \lambda) \end{vmatrix} &= 0, \\ (11 - \lambda)(11 - \lambda) - 1 &= 0, \\ (\lambda - 10)(\lambda - 12) &= 0, \\ \lambda_1 &= 12, \\ \lambda_2 &= 10. \end{aligned}$$

Zdôraznime jednoznačnosť poradia vlastných čísel, tj. zostupné poradie.

Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 12$ dostávame lineárny homogénny systém

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (11 - 12) & 1 \\ 1 & (11 - 12) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

alebo v zápise sústavy rovníc

$$\begin{aligned} -u_{1,1} + u_{1,2} &= 0, \\ u_{1,1} - u_{1,2} &= 0, \end{aligned}$$

ktorej riešením je yrejme vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme

zvoliť za riešenie vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ktorý normalizujeme

$$\tilde{\mathbf{u}}_1^T = \frac{\mathbf{u}_1^T}{|\mathbf{u}_1^T|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Pre vlastné číslo $\lambda_2 = 10$ dostávame lineárnu homogénnu sústavu

$$\begin{pmatrix} (11-10) & 1 \\ 1 & (11-10) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{0},$$

teda

$$u_{1,1} + u_{1,2} = 0,$$

$$u_{1,1} + u_{1,2} = 0,$$

ktorej riešením je vektor $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zvoliť za riešenie vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, ktorý znormalizujeme

$$\tilde{\mathbf{u}}_1^T = \frac{\mathbf{u}_1^T}{|\mathbf{u}_1^T|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right).$$

Hľadaná matica U je teda

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Výpočet matice V je obdobný

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nájdeme vlastné čísla tejto matice

$$[(A^T \cdot A) - \lambda \cdot I] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

čo platí práve vtedy, ak

$$\begin{aligned} \det [(A \cdot A^T) - \lambda \cdot I] &= 0, \\ \begin{vmatrix} (10-\lambda) & 0 & 2 \\ 0 & (10-\lambda) & 4 \\ 2 & 4 & (2-\lambda) \end{vmatrix} &= 0, \\ -\lambda^3 + 22\lambda^2 - 120\lambda &= 0, \\ \lambda(\lambda - 10)(\lambda - 12) &= 0, \\ \lambda_1 &= 12, \\ \lambda_2 &= 10, \\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 12$ dostávame lineárny homogénny systém

$$\begin{pmatrix} (10-12) & 0 & 2 \\ 0 & (10-12) & 4 \\ 2 & 4 & (2-12) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime rozvojom napríklad podľa druhého riadku

$$v_{1,1} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = 8,$$

$$v_{1,2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 16,$$

$$v_{1,3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Riešením je vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k \\ 16k \\ 8k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zvoliť za riešenie aj vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ktorý má po normalizácii tvar

$$\tilde{\mathbf{v}}_1^T = \frac{\mathbf{v}_1^T}{|\mathbf{v}_1^T|} = \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Vlastnému číslu $\lambda_2 = 10$ prislúcha homogénna sústava lineárnych rovníc

$$\begin{pmatrix} (10-10) & 0 & 2 \\ 0 & (10-10) & 4 \\ 2 & 4 & (2-10) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime rozvojom opäť podľa druhého riadku (nemôžeme podľa tretieho, lebo prvé dva sú lineárne závislé)

$$v_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 8,$$

$$v_{2,2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -4,$$

$$v_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

odkiaľ dostávame príslušný vlastný vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k \\ -4k \\ 0k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$. Opäť môžeme zvoliť za riešenie vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ktorý normalizujeme

$$\tilde{\mathbf{v}}_2^T = \frac{\mathbf{v}_2^T}{|\mathbf{v}_2^T|} = \frac{(2, -1, 0)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0 \right).$$

Vlastný vektor $\mathbf{v}_3$ prislúcha vlastnému číslu $\lambda_3 = 0$, pre ktoré dostávame homogénnu sústavu

$$\begin{pmatrix} (10-0) & 0 & 2 \\ 0 & (10-0) & 4 \\ 2 & 4 & (2-0) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime napríklad podľa rozvoja druhého riadku.

$$v_{3,1} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$v_{3,2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 16,$$

$$v_{3,3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -40.$$

Vlastný vektor $\mathbf{v}_2$ prislúchajúci k vlastnému číslu $\lambda_3 = 0$ je $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ v_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k \\ 16k \\ -40k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Opäť môžeme zvoliť za riešenie vektor $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Tento normalizujeme

$$\tilde{\mathbf{v}}_3^T = \frac{\mathbf{v}_3^T}{|\mathbf{v}_3^T|} = \frac{(1, 2, -5)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}} \right).$$

Matica V má teda tvar

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{30}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

V rozklade však vystupuje transponovaný tvar tejto matice, ktorý sme trochu upravili

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{30}}{30} & \frac{-5\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix}.$$

Matica S typu $[2, 3]$ je diagonálna matica obsahujúca druhé odmocniny vlastných čísel matíc U a V

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice A je teda

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= U_{m,m} \cdot S_{m,n} \cdot V_{n,n}^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{5}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1\sqrt{30}}{30} & \frac{2\sqrt{30}}{30} & \frac{-5\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

■ **Príklad 14.8** Nájdime singulárny rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Začneme hľadaním matice U , čiže

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jej vlastné čísla a k nim prislúchajúce vlastné vektory nájdeme riešením rovnice

$$[(A \cdot A^T) - \lambda \cdot I] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

pre ktorej riešenie platí

$$\begin{aligned} \det [(A \cdot A^T) - \lambda \cdot I] &= 0, \\ \begin{vmatrix} (5-\lambda) & 1 & 2 \\ 1 & (1-\lambda) & 0 \\ 2 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} &= 0, \\ -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda &= 0, \\ \lambda(\lambda-1)(\lambda-6) &= 0, \\ \lambda_1 &= 6, \\ \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 6$ dostávame homogénnu sústavu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (5-6) & 1 & 2 \\ 1 & (1-6) & 0 \\ 2 & 0 & (1-6) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

ktorú riešime rozvojom napríklad podľa prvého riadku

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 25, \\ u_{1,2} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5, \\ u_{1,3} &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 10. \end{aligned}$$

Riešením je vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25k \\ 5k \\ 10k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$ a teda aj vektor $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ktorý znor-
malizujeme

$$\tilde{\mathbf{u}}_1^T = \frac{\mathbf{u}_1^T}{|\mathbf{u}_1^T|} = \frac{(5, 1, 2)}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 2^2}} = \left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right).$$

Vlastnému číslu $\lambda_2 = 1$ prislúcha homogénna sústava lineárnych rovníc

$$\begin{pmatrix} (5-1) & 1 & 2 \\ 1 & (1-1) & 0 \\ 2 & 0 & (1-1) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime rozvojom opäť podľa druhého riadku (nemôžeme podľa prvého, lebo druhý a tretí sú lineárne závislé)

$$u_{2,1} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$u_{2,2} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$u_{2,3} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

odkiaľ dostávame príslušný vlastný vektor $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4k \\ 2k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$. Opäť môžeme

zvoliť za riešenie vektor $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a tento normalizujeme

$$\tilde{\mathbf{u}}_2^T = \frac{\mathbf{u}_2^T}{|\mathbf{u}_2^T|} = \frac{(0, -2, 1)}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \left(0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Vlastný vektor $\mathbf{u}_3$ prislúcha vlastnému číslu $\lambda_3 = 0$, pre ktoré dostávame homogénnu sústavu

$$\begin{pmatrix} (5-0) & 1 & 2 \\ 1 & (1-0) & 0 \\ 2 & 0 & (1-0) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

ktorú riešime napríklad podľa rozvoja prvého riadku.

$$u_{3,1} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$u_{3,2} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$u_{3,3} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Vlastný vektor $\mathbf{v}_2$ prislúchajúci k vlastnému číslu $\lambda_3 = 0$ je $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} u_{3,1} \\ u_{3,2} \\ u_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

Opäť zvolím riešením napríklad vektor $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ktorý znormalizujeme

$$\tilde{\mathbf{u}}_3^T = \frac{\mathbf{u}_3^T}{|\mathbf{u}_3^T|} = \frac{(1, -1, -2)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right).$$

Matica U má teda tvar

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{30} & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{30}\sqrt{30} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{-1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{15}\sqrt{30} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{-1}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Prejdime teraz k určeniu matice V

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nájďme vlastné čísla tejto matice $A^T \cdot A$

$$[(A^T \cdot A) - \lambda \cdot I] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

$$\det[(A \cdot A^T) - \lambda \cdot I] = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 6,$$

$$\lambda_2 = 1.$$

Pre vlastné číslo $\lambda_1 = 6$ dostávame homogénnu sústavu

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0},$$

ktorej riešením je vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$, alebo aj vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, ktorý má po normalizácii tvar

$$\tilde{\mathbf{v}}_1^T = \frac{\mathbf{v}_1^T}{|\mathbf{v}_1^T|} = \frac{(1, 2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Pre vlastné číslo $\lambda_2 = 1$ dostávame homogénnu sústavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

ktorej riešením je vektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k \\ k \end{pmatrix}$, kde $k \in \mathbb{R}$ a aj vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ktorý po normalizácii má tvar

$$\tilde{\mathbf{v}}_1^T = \frac{\mathbf{v}_1^T}{|\mathbf{v}_1^T|} = \frac{(-2, 1)}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

A preto matica V má tvar

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Hľadaná matica V^T je preto

$$V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Matica S typu $[3, 2]$ je diagonálna matica obsahujúca druhé odmocniny vlastných čísel matíc U a V

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Singulárny rozklad matice A je teda

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= U_{m,m} \cdot S_{m,n} \cdot V_{n,n}^T = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\sqrt{30} & 0 & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{30}\sqrt{30} & -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{-1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{15}\sqrt{30} & \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{-1}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Singulárny rozklad matíc nachádza bohaté uplatnenie v teórii matíc a algebry (výpočet pseudoinverzných matíc, riešenie sústav homogénnych lineárnych rovníc, podobné matice, atď.). V minulosti sa tento rozklad používal i na riešenie nehomogénnych sústav lineárnych rovníc. Uvedme si tento postup, ktorý je veľmi podobný využitiu LU rozkladu na riešenie týchto sústav.

Pôvodnú maticu sústavy (14.o.2)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

nahrádzame singulárnym rozkladom

$$U \cdot S \cdot V^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

túto maticovú rovnicu prenásobíme zľava inverznou maticou U^{-1} (matica U je ortonormálna, a teda platí $U^{-1} = U^T$)

$$S \cdot V^T \cdot \mathbf{x} = U^T \cdot \mathbf{b}.$$

Položíme $V^T \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = V \cdot \mathbf{y}$ a $U^T \cdot \mathbf{b} = \mathbf{d}$. Po vyriešení (vynásobením) $\mathbf{d} = U^T \cdot \mathbf{b}$ a následne vyriešime sústavu $S \cdot \mathbf{y} = \mathbf{d}$.

V prostredí MatLab by pre danú maticu sústav A a stĺpcový vektor pravých strán $\mathbf{b}$ postup vyzeral nasledovne

$$\begin{aligned} [U,S,V] &= \text{svd}(A); \\ \mathbf{x} &= V * ((U' * \mathbf{b}) ./ \text{diag}(S)) \end{aligned}$$

14.7 Jacobiho metóda

Pri použití iteračnej metódy nebudeme hľadať presné riešenie, ale istú iteračnú postupnosť, ktorá konverguje ku presnému riešeniu. Ide de facto o ten istý postup ako pri metóde prostej iterácie pri riešení nelineárnych rovníc, ibaže namiesto postupnosti čísel budeme teraz hľadať postupnosť n -tíc.

Princíp Jacobiho metódy si ukážeme na systéme 3×3 .

Majme sústavu troch rovníc o troch neznámych

$$a_{1,1}\boxed{x_1} + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1,$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}\boxed{x_2} + a_{2,3}x_3 = b_2,$$

$$a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}\boxed{x_3} = b_3,$$

vyjadrime si zarámované premenné

$$x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}) / a_{1,1},$$

$$x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}) / a_{2,2},$$

$$x_3^{(k+1)} = (b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}) / a_{3,3}.$$

Týmto spôsobom sme dostali iteračnú postupnosť Jacobiho metódy

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Najskôr zvolíme počiatočnú aproximáciu $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$, dosadíme do iteračného vzťahu a dostávame

$\mathbf{x}^{(1)} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^{(0)})$, atď., až pokým proces neukončíme (napr. od istého desatinného miesta sa hodnoty iteračnej postupnosti nemenia).

Pozrime sa na problematiku, trochu všeobecnejšie. Rozložme si maticu sústavy A na tri matice: striktné dolnotrojuholníkovú maticu L_S , diagonálnu maticu D a striktné hornotrojuholníkovú maticu U_S

$$L_S = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$U_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

V takomto prípade môžeme naše vyjadrenie zarámovaných premenných zapísať nasledovne

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$(L_S + D + U_S)\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$$D\mathbf{x} = \mathbf{b} - (L_S + U_S)\mathbf{x},$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1} [\mathbf{b} - (L_S + U_S)\mathbf{x}^{(k)}].$$

Tento vzťah je všeobecným tvarom *Jacobyho metódy*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1} \left[\mathbf{b} - (L_S + U_S) \mathbf{x}^{(k)} \right],$$

v zložkovom tvare ho môžeme zapísať

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Doteraz sme sa nezaoberali, tým kedy bude iteračný proces konvergovať akedy naopak nebude. Pre tieto účely je potrebné zaviesť nasledujúci pojem.

Definícia 14.7.1 Matica A sa nazýva riadkovo [resp. stĺpcovo] diagonálne dominantná práve vtedy, ak platí

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\left[\text{resp. } |a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{i,j}|, \quad j = 1, 2, \dots, n \right].$$

R To, či je matica riadkovo [resp. stĺpcovo] diagonálne dominantná, znamená to, že absolútna hodnota jej diagonálnych prvkov je väčšia ako suma absolútnych hodnôt ostatných prvkov v príslušnom riadku [resp. stĺpci].

Veta 14.7.1 Ak je matica diagonálne dominantná potom Jacobiho metóda konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $\mathbf{x}_0$.

R Diagonálne dominantná matica predstavuje kontraktívne zobrazenie.

R Iteračný proces ukončíme, ak $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$ pre každé $i = 1, 2, \dots, n$.

■ **Príklad 14.9** Jacobiho metódou riešme sústavu s presnosťou $\varepsilon = 0.01$

$$\begin{aligned} 15x_1 - x_2 + 2x_3 &= 30, \\ 2x_1 - 10x_2 + x_3 &= 23, \\ x_1 + 3x_2 + 18x_3 &= -22. \end{aligned}$$

Matica sústavy je zrejme diagonálne dominantná, preto môžeme prikrčiť ku jej riešeniu. Vyjadríme si iteračný vzťah

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (30 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) / 15, \\ x_2^{(k+1)} &= (23 - 2x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) / (-10), \\ x_3^{(k+1)} &= (-22 - x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) / 18. \end{aligned}$$

Pre počiatočnú aproximáciu $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}$ dostávame nasledujúcu postupnosť

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	2.0000	-2.3000	-1.2222
2	2.0096	-2.0222	-0.9500
3	1.9918	-1.9930	-0.9968
4	2.0000	-2.0013	-1.0007
5	2.0000	-2.0000	-1.0000

S presnosťou $\varepsilon = 0.01$ je približné riešenie sústavy $\mathbf{x}_5 \doteq \begin{pmatrix} 2.00 \\ -2.00 \\ -1.00 \end{pmatrix}$. ■

■ **Príklad 14.10** Jacobiho metódou riešme sústavu s presnosťou $\varepsilon = 0.01$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 &= -4, \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 10. \end{aligned}$$

Maticu sústavy upravme na tvar diagonálne dominantný

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Vyjadrime si iterачný vzťah

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (10 - 2x_2^{(k)} + 3x_3^{(k)})/6, \\ x_2^{(k+1)} &= (6 - x_1^{(k)} + 2x_3^{(k)})/4, \\ x_3^{(k+1)} &= (4 + 3x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)})/7. \end{aligned}$$

Pre počiatočnú aproximáciu $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}$ dostávame nasledujúcu postupnosť

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	1.6667	1.500	0.5714
2	1.4524	1.3690	1.7143
3	2.0675	1.9940	1.5850
4	1.7945	1.7757	2.0272
5	2.0884	2.0650	1.8478
6	1.9023	1.9018	2.0564
7	2.0610	2.0527	1.9301
8	1.9475	1.9498	2.0412
9	2.0373	2.0337	1.9631

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
10	1.9703	1.9722	2.0256
11	2.0221	2.0202	1.9794
12	1.9829	1.9842	2.0152
13	2.0129	2.0119	1.9882
14	1.9901	1.9909	2.0089
15	2.0075	2.0069	1.9932
16	1.9943	1.9947	2.0052
17	2.0044	2.0040	1.9960
18	1.9967	1.9969	2.0030

S presnosťou $\varepsilon = 0.01$ bude približné riešenie sústavy $\mathbf{x}_{18} \doteq \begin{pmatrix} 2.00 \\ 2.00 \\ 2.00 \end{pmatrix}$. ■

14.8 Gauss-Seidelova metóda

Vyjadrenie iteráčného vzťahu Jacobiho metódy

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}) / a_{1,1}, \\ x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)}) / a_{2,2}, \\ x_3^{(k+1)} &= (b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)}) / a_{3,3}. \end{aligned}$$

si upravíme, a to takým spôsobom, že v druhom riadku, kde hodnotu $x_1^{(k)}$ nahradíme už predtým vypočítanou presnejšou hodnotou $x_1^{(k+1)}$. Takto by sme mohli pokračovať a vyjadriť iteráčné vzťahy za použitia už vypočítaných presnejších hodnôt

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)}) / a_{1,1}, \\ x_2^{(k+1)} &= (b_2 - a_{2,1}x_1^{(k+1)} - a_{2,3}x_3^{(k)}) / a_{2,2}, \\ x_3^{(k+1)} &= (b_3 - a_{3,1}x_1^{(k+1)} - a_{3,2}x_2^{(k+1)}) / a_{3,3}. \end{aligned}$$

Toto je podstata *Gauss-Seidelovej metódy*.

Vo všeobecnosti môžeme Gauss-Seidelovu metódu zapísať ako

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ (L_S + D + U_S)\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ D\mathbf{x} &= \mathbf{b} - L_S\mathbf{x} + U_S\mathbf{x}, \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= D^{-1} [\mathbf{b} - L_S\mathbf{x}^{(k+1)} + U_S\mathbf{x}^{(k)}]. \end{aligned}$$

V zložkovom zápise

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



Gauss-Seidelova metóda takisto konverguje pre ľubovoľnú počiatočnú aproximáciu $\mathbf{x}_0$, ak je matica sústavy kontraktívne zobrazenie, t.j. je to diagonálne dominantná matica.

■ **Príklad 14.11** Gauss-Seidelovou metódou riešme sústavu s presnosťou $\varepsilon = 0.01$

$$6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 10,$$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6,$$

$$3x_1 + 2x_2 - 7x_3 = -4.$$

Matica sústavy je zrejme diagonálne dominantná, a preto vyjadríme iteračný vzťah

$$x_1^{(k+1)} = (10 - 2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)}) / 6,$$

$$x_2^{(k+1)} = (6 - x_1^{(k+1)} + 2x_3^{(k)}) / 4,$$

$$x_3^{(k+1)} = (4 + 3x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}) / 7.$$

Pre počiatočnú aproximáciu $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}$ dostávame nasledujúcu postupnosť

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	1.6667	1.0833	1.5952
2	2.1032	1.7718	1.9790
3	2.0656	1.9731	2.0204
4	2.0192	2.0054	2.0098
5	2.0031	2.0041	2.0025
6	1.9999	2.0013	2.0003

S presnosťou $\varepsilon = 0.01$ dostávame riešenie sústavy $\mathbf{x}_6 \doteq \begin{pmatrix} 2.00 \\ 2.00 \\ 2.00 \end{pmatrix}$. ■

15. Interpolácia

Hlavnou myšlienkou interpolácie je nájsť funkciu (polynóm) $P_n(x)$, ktorá sa bude zhodovať s funkciou $f(x)$ v n rôznych *uzlových bodoch* x_i , tj.

$$P_n(x) = f(x_i) = f_i = y_i \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Veta 15.0.1 Pre každú $(n+1)$ -ticu funkčných hodnôt $y_0, y_1, \dots, y_n$ a $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$, existuje práve jeden algebraický polynóm n -tého stupňa

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (15.0.1)$$

taký, že preň platí

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (15.0.2)$$

Dôkaz. Priamym dosadením do (15.0.2) dostávame:

$$y_0 = P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n,$$

$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n,$$

...

$$y_n = P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n.$$

To je sústava $(n+1)$ rovníc o $(n+1)$ neznámych, ktorej riešením sú koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ polynómu (15.0.1). Táto sústava má vždy jediné riešenie, nakoľko determinant matice (Vandermondeova¹ matrica)

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

je vždy nenulový. ■

¹ *Alexandre-Théophile Vandermonde* (* 28. 2. 1735, Paríž – † 1. 1. 1796, Paríž) bol francúzsky matematik, chemik a hudobník.

Teraz uvidíme dve konštrukcie tohto polynómu.

15.1 Lagrangeova interpolácia

Lagrangeov² interpolačný polynóm zostrojíme pre násobením tzv. *elementárnych Lagrangeových interpolačných polynómov* $l_{n,i}(x)$ funkčnou hodnotou danej funkcie v uzlových bodoch $y_i = f(x_i)$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_{n,i}(x).$$

Elementárne Lagrangeové interpolačné polynómy sú definované

$$l_{n,i}(x) = \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1}) \cdot (x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_i-x_0) \cdot (x_i-x_1) \cdot \dots \cdot (x_i-x_{i-1}) \cdot (x_i-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i-x_n)},$$

teda tak, aby hodnota tohto polynómu bola vo všetkých uzlových bodoch, okrem i -tého, rovná nule a v i -tom uzlovom bode je hodnota, nakoľko je polynóm normovaný, rovná jednej

$$l_{n,i}(x) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}.$$

■ **Príklad 15.1** Nájdime Lagrangeov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie danej tabuľkou

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Elementárne Lagrangeove interpolačné polynómy pre tieto hodnoty sú

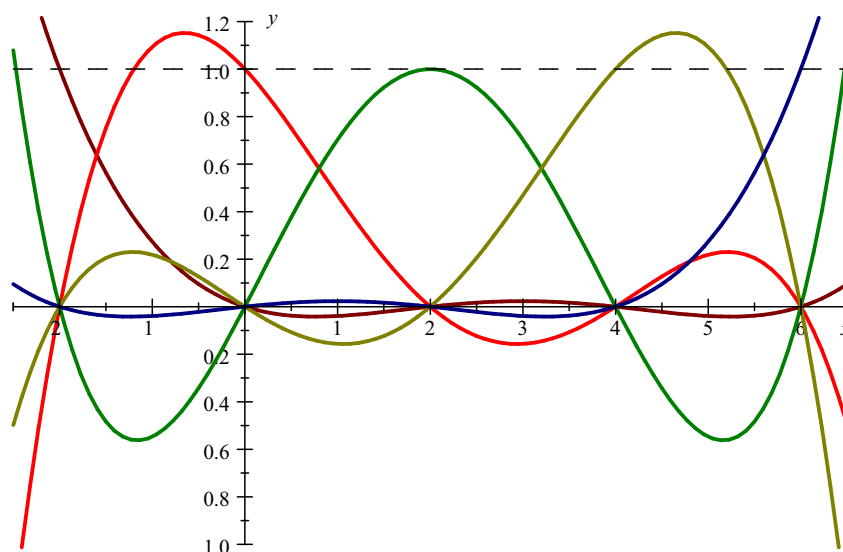
$$\begin{aligned} l_{4,0}(x) &= \frac{x(x-2)(x-4)(x-6)}{(-2)(-2-2)(-2-4)(-2-6)} = \frac{1}{384}x(x-2)(x-4)(x-6) \\ &= \frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{32}x^3 + \frac{11}{96}x^2 - \frac{1}{8}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{4,1}(x) &= \frac{(x+2)(x-2)(x-4)(x-6)}{(0+2)(0-2)(0-4)(0-6)} = -\frac{1}{96}(x-2)(x+2)(x-4)(x-6) \\ &= \frac{5}{48}x^3 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{5}{24}x^2 - \frac{5}{12}x + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{4,2}(x) &= \frac{(x+2)x(x-4)(x-6)}{(2+2)2(2-4)(2-6)} = \frac{1}{64}x(x+2)(x-4)(x-6) \\ &= \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{4}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{4,3}(x) &= \frac{(x+2)x(x-2)(x-6)}{(4+2)4(4-2)(4-6)} = -\frac{1}{96}x(x-2)(x+2)(x-6) \\ &= \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{4}x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{4,4}(x) &= \frac{(x+2)x(x-2)(x-4)}{(6+2)6(6-2)(6-4)} = \frac{1}{384}x(x-2)(x+2)(x-4) \\ &= \frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{96}x^3 - \frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{24}x. \end{aligned}$$



Obr. 15.1.1: Elementárne Lagrangeove interpolačné polynómy

Jednotlivé elementárne Lagrangeove interpolačné polynómy môžeme vidieť na obrázku. A teda Lagrangeov interpolačný polynóm je

$$\begin{aligned}
 L_4(x) &= 2 \cdot \frac{x(x-2)(x-4)(x-6)}{384} + 1 \cdot \frac{(x+2)(x-2)(x-4)(x-6)}{-96} \\
 &\quad + (-1) \cdot \frac{(x+2)x(x-4)(x-6)}{64} + 2 \cdot \frac{(x+2)x(x-2)(x-6)}{-96} \\
 &\quad + 4 \cdot \frac{(x+2)x(x-2)(x-4)}{384} \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{32}x^3 + \frac{11}{96}x^2 - \frac{1}{8}x \right) + \left(\frac{5}{48}x^3 - \frac{1}{96}x^4 - \frac{5}{24}x^2 - \frac{5}{12}x + 1 \right) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{4}x \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{4}x \right) \\
 &\quad + 4 \cdot \left(\frac{1}{384}x^4 - \frac{1}{96}x^3 - \frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{24}x \right)
 \end{aligned}$$

jeho roznásobením a sčítaním dostaneme

$$L_4(x) = -\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x + 1.$$

■

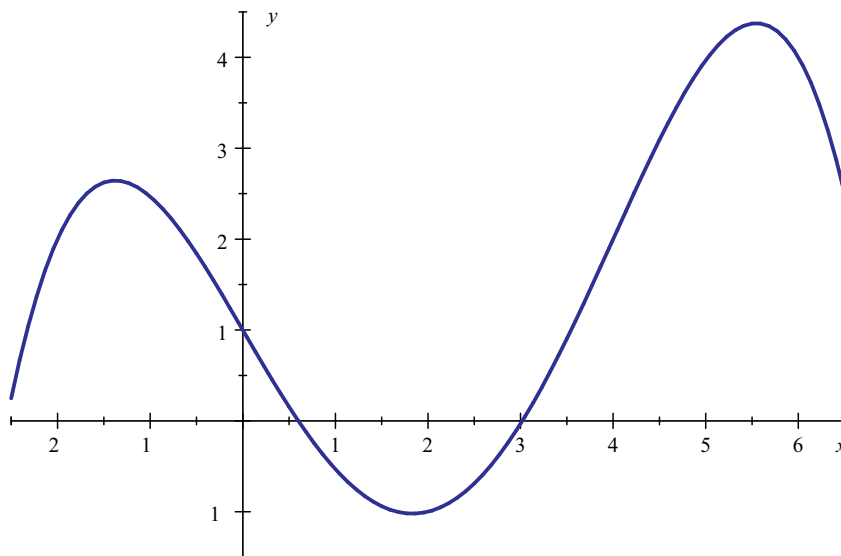
15.2 Newtonova interpolácia

Pomocou Newtonovej interpolácie vypočítame opäť ten istý polynóm ako Lagrangeovou interpoláciou, čo je zrejmé, nakoľko, ako hovorí veta (15.0.1), takýto polynóm je jediný. Rozdielny je spôsob jeho nájdenia. Newtonova metóda nevytvára celý polynóm naraz, ale postupne zahŕňa viac a viac bodov do interpolácie a tak konštruuje polynómy stále vyššieho stupňa.

Najskôr zavedieme pojem *pomernej diferencie*. Pomerná diferencia prvého rádu je definovaná vzťahom

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

²Joseph Louis Lagrange (* 25. 1. 1736, Turín – † 10. 4. 1813, Paríž) bol taliansko-francúzsky matematik a astronóm, jeden zo zakladateľov variačného počtu.

Obr. 15.1.2: Lagrangeov interpolačný polynóm $L_4(x)$

Čo je akýsi odhad prvej derivácie funkcie pomocou jej funkčných hodnôt. Obdobne definujeme aj jej druhú pomernú diferenciu

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}.$$

A všeobecne aj jej n -tú pomernú diferenciu

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}.$$

Newtonova metóda začína konštantnou interpoláciou prechádzajúcou prvou funkčnou hodnotou interpolovanej funkcie

$$N_0(x) = f(x_0).$$

Pridaním ďalšieho bodu dostávame lineárnu interpoláciu, tj. priamku prechádzajúcu prvými dvoma uzlovými bodmi (priamka s nenulovou smernicou)

$$N_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_1, x_0].$$

Ak by sme pridali ďalší bod, dostávame kvadratickú interpoláciu. Štyrmi bodmi by bola určená kubická interpolácia a pre ďalší bod obdobne, atď. až po n -tú interpoláciu

$$\begin{aligned} N_2(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_2; x_1; x_0], \\ N_3(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_2; x_1; x_0] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot f[x_3; x_2; x_1; x_0], \\ &\dots \\ N_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0) \cdot f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_2; x_1; x_0] \\ &\quad + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \cdot f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]. \end{aligned}$$

Výhodou metódy odvodenia Newtonovho interpolačného polynómu je, že pridávaním ďalších členov môžeme zvyšovať presnosť interpolácie, pričom body x_i ani nemusia byť zoradené vzostupne. Čo dáva isté možnosti na spresnenie výsledku interpolácie pridaním ďalších uzlových bodov (výsledkov merania) v požadovanej oblasti.

■ **Príklad 15.2** Nájdime Newtonov interpolačný polynóm pre uzlové body funkcie danej tabuľkou

$x_i :$	-2	0	2	4	6
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2	4

Výsledky budeme zapisovať do nasledujúcej tabuľky

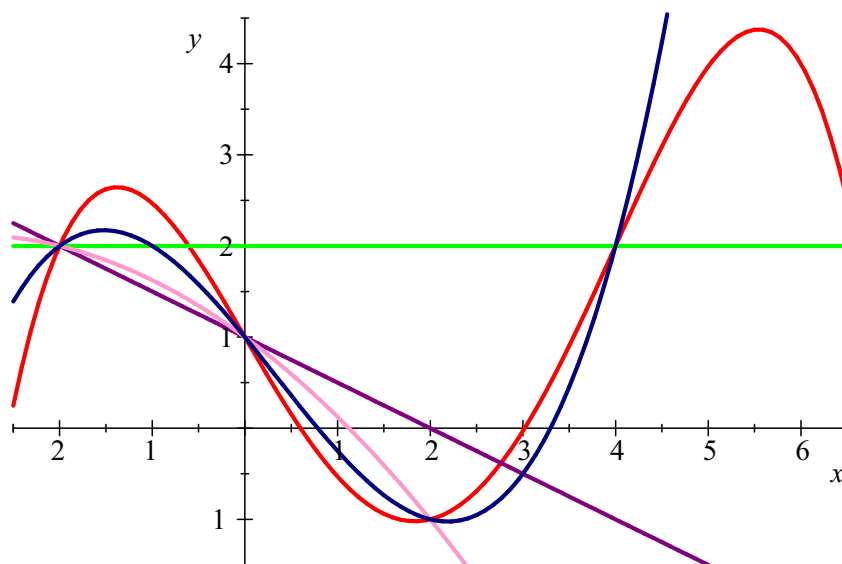
i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+3}, x_{i+2}, x_{i+1}, x_i]$	$f[x_{i+4}, \dots, x_i]$
0	-2	2	$\frac{1-2}{0-(-2)} = -\frac{1}{2}$	$\frac{-1-(-\frac{1}{2})}{2-(-2)} = -\frac{1}{8}$	$\frac{\frac{5}{8}-(-\frac{1}{8})}{4-(-2)} = \frac{1}{8}$	$\frac{-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}}{6-(-2)} = -\frac{1}{32}$
1	0	1	$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	$\frac{\frac{3}{2}-(-1)}{4-0} = \frac{5}{8}$	$\frac{-\frac{1}{8}-\frac{5}{8}}{6-0} = -\frac{1}{8}$	
2	2	-1	$\frac{2-(-1)}{4-2} = \frac{3}{2}$	$\frac{1-\frac{3}{2}}{6-2} = -\frac{1}{8}$		
3	4	2	$\frac{4-2}{6-4} = 1$			
4	6	4				

Orámkované hodnoty použijeme na určenie Newtonovho interpolačného polynómu

$$\begin{aligned}
 N_4(x) &= 2 + (x+2) \left(-\frac{1}{2}\right) + (x+2)x \left(-\frac{1}{8}\right) \\
 &\quad + (x+2)x(x-2) \frac{1}{8} + (x+2)x(x-2)(x-4) \left(-\frac{1}{32}\right) \\
 &= -\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x + 1.
 \end{aligned}$$

■

Na nasledujúcom obrázku môžeme vidieť Newtonove polynómy postupne pre jednotlivé uzlové body:



Obr. 15.2.1: Newtonove interpolačné polynómy

$x_i :$	-2
$y_i = f(x_i) :$	2

$$N_0(x) = 2, \quad (\text{zelený graf})$$

$x_i :$	-2	0
$y_i = f(x_i) :$	2	1

$$N_1(x) = 2 + (x+2) \left(-\frac{1}{2}\right), \quad (\text{fialový graf})$$

$x_i :$	-2	0	2
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1

$$N_2(x) = 2 + (x+2) \left(-\frac{1}{2}\right) + (x+2)x \left(-\frac{1}{8}\right), \quad (\text{ružový graf})$$

$x_i :$	-2	0	2	4
$y_i = f(x_i) :$	2	1	-1	2

$$N_3(x) = 2 + (x+2) \left(-\frac{1}{2}\right) + (x+2)x \left(-\frac{1}{8}\right) + (x+2)x(x-2) \frac{1}{8}, \quad (\text{modrý graf})$$

až napokon samotný $N_4(x)$. (červený graf)

Je teda zrejmé, že Newtonov interpolačný polynóm má oproti Lagrangeovmu výhodu v možnosti pridania ďalšieho uzlového bodu s tým, že nie je nutné znovu prepočítavať predošlé hodnoty.

15.2.1 Newtonov interpolačný polynóm pre ekvidištantné uzly

Predošlé príklady mali uzlové body rozmiestnené v rovnakých vzdialenostiach, tzn. *ekvidištantne*. Nebolo to požiadavkou, tj. oba polynómy nevyžadujú aby boli uzlové body takto rozmiestnené. Ak sú však uzlové body rozmiestnené ekvidištantne, tj. $x_{i+1} - x_i = h = \text{konšt.}$, môžeme Newtonov interpolačný polynóm modifikovať, a to nasledujúcim spôsobom.

Namiesto pojmu pomernej diferencie budeme požívať obyčajnú diferenciu, ktorú definujeme nižšie. Diferencia prvého rádu bude

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

a diferencia vyššieho rádu je

$$\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x),$$

kde $h = x_{i+1} - x_i$ je zrejme krok, tj. vzdialenosť medzi jednotlivými uzlami. Skrátené píšeme

$$\Delta f_i = f(x_i + h) - f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f_{i+1} - f_i,$$

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k+1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i.$$

Diferencie môžeme teraz vyjadriť ako

$$f[x_{i+1}, x_i] = \frac{\Delta f_i}{h}.$$

Pre diferenciu druhého rádu platí

$$f[x_{i+2}, x_{i+1}, x_i] = \frac{\frac{\Delta f_{i+1}}{h} - \frac{\Delta f_i}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2}.$$

Matematickou indukciou dostávame vzťah pre diferenciu k -tého rádu

$$f[x_{i+k}, \dots, x_i] = \frac{\Delta^k f_i}{k!h^k}.$$

Newtonov interpolačný polynóm pre ekvidistantné uzly má teda tvar

$$N_n(x) = f_0 + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta f_i}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f_i}{2h^2} + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \cdot \frac{\Delta^k f_i}{k!h^k}.$$

15.3 Odhad chyby interpolačného polynómu

Pre použitie interpolačných polynómov je dôležité poznať aspoň mieru chyby, ktorej sme sa pri interpolácii dopustili, preto je opodstatnené si túto chybu nejakým spôsobom vymedziť.

Veta 15.3.1 Nech interval I je interval obsahujúci všetky uzlové body x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, určujúce interpolačný polynóm $P_n(x)$ a nech funkcia $f(x)$ je $(n+1)$ -krát diferencovateľná na tomto intervale. Potom pre ľubovoľné $x \in I$ existuje také $\xi \in I$, že pre chybu interpolácie platí

$$\varepsilon(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n). \quad (15.3.1)$$

R Použitie predošlého odhadu je v praxi dosť náročné, keďže hodnota ξ je pre každý bod x z intervalu I iná. Preto chybu ohraničíme aspoň zhora.

Veta 15.3.2 Označme $M_{n+1} = \max_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$, potom pre horné ohraničenie chyby platí

$$|\varepsilon(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

16. Aproximácia funkcií

16.1 Aproximácia metódou najmenších štvorcov (diskrétny variant)

V tejto časti sa budeme zaoberať aproximáciou funkcií, a to konkrétne aproximáciou metódou najmenších štvorcov. V prvom rade bude dôležité ozrejmiť pojem aproximácie.

Aproximáciou funkcie máme na mysli nahradenie funkcie inou funkciou, ktorej vzdialenosť od pôvodnej funkcie je minimálna. Abstraktnosť pojmu "minimálna vzdialenosť dvoch funkcií" nahradíme požiadavkou, aby odchýlky od pôvodnej funkcie boli v celkovom súčte minimálne. V istom zmysle môžeme hovoriť aj o akomsi "priblížení".

Vo všeobecnej praxi často ani nie je nutné, aby nami hľadaná krivka prechádzala všetkými bodmi pôvodnej funkcie, nakoľko sa často jedná o hodnoty funkcie poznačené či už chybou merania, alebo inak znehodnotené, a teda hľadaná krivka má do istej miery iba vystihovať charakter hodnôt (funkcie).

Máme dané dvojice bodov $[x_i, y_i]$, $i = 0, 1, \dots, n$. Hľadáme teda polynóm m -tého stupňa tvaru

$$p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m = \sum_{j=0}^m a_jx^j.$$

Tu by sme sa chceli pozastaviť a zdôrazniť, že stupeň polynómu m je väčšinou podstatne menší ako počet bodov n , ktorými tento polynóm prekladáme. Ak by bol počet bodov rovnaký ako stupeň polynómu, išlo by o interpoláciu, viď. časť o interpolácii, konkrétne Vandermonтова matica.

Požadujeme, aby suma odchýlok nášho polynómu od daných hodnôt (danej funkcie) bola minimálna, tj.

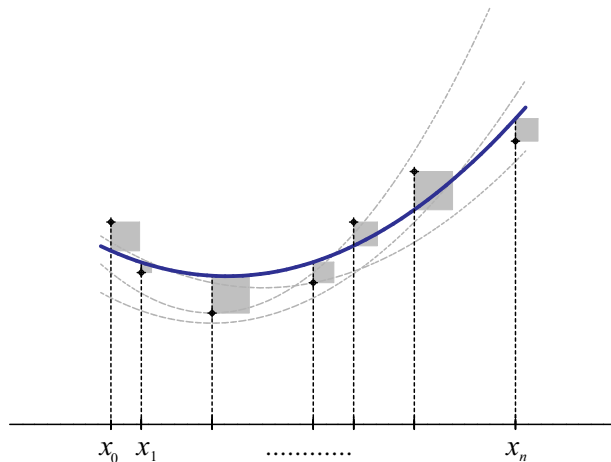
$$E = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i = \sum_{i=0}^n |p_m(x_i) - y_i| \rightarrow \min.$$

Nakoľko absolútnu hodnotu nevieme derivovať nahradíme ju druhou mocninou rozdielu, ktorá má v podstate totožné vlastnosti, tj. je kladná a definuje mieru rozdielu hodnôt

$$E = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n (p_m(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Dosadíme nami hľadaný polynóm, tj. $p_m(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$

$$E = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left(a_j x_i^j - y_i \right)^2.$$



Obr. 16.1.1: Metóda najmenších štvorcov

Táto suma je funkciou koeficientov hľadaného polynómu $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ a minimálna bude v prípade, že bude prvá derivácia rovná nule

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0.$$

Upravíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_k} &= \frac{\partial}{\partial a_k} \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left(a_j x_i^j - y_i \right)^2 \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial}{\partial a_k} \left(a_j x_i^j - y_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m 2 \left(a_j x_i^j - y_i \right) \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} \left(a_j x_i^j - y_i \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m 2 \left(a_j x_i^j - y_i \right) \cdot x_i^k \\ &= 2 \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \left(a_j x_i^{j+k} - y_i x_i^k \right) = 2 \left(\sum_{j=0}^m a_j \sum_{i=0}^n x_i^{j+k} - \sum_{i=0}^n y_i x_i^k \right) = 0. \end{aligned}$$

Zavedieme označenie

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{i=0}^n x_i^k, \\ T_k &= \sum_{i=0}^n y_i x_i^k, \end{aligned}$$

a dostávame

$$\sum_{j=0}^m a_j \cdot S_{j+k} - T_k = 0.$$

Čo je v podstate systém lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} S_0 a_0 + S_1 a_1 + \dots + S_m a_m &= T_0, \\ S_1 a_0 + S_2 a_1 + \dots + S_{m+1} a_m &= T_1, \\ &\dots \\ S_m a_0 + S_{m+1} a_1 + \dots + S_{2m} a_m &= T_m. \end{aligned}$$

Maticovo môžeme tento systém zapísať v tvare

$$\begin{pmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_m \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_m & S_{m+1} & \cdots & S_{2m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_m \end{pmatrix}.$$

Riešením tohto systému lineárnych rovníc získame koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ polynómu, ktorý, v zmysle minimálnosti odchýlok uzlových bodov od nájdeného polynómu, najlepšie vystihuje charakter hodnôt funkcie určených uzlovými bodmi.

R Pre polynóm 1. stupňa (priamka) má systém nasledujúci tvar

$$\begin{aligned} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i &= \sum_{i=0}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n y_i x_i. \end{aligned}$$

R Pre polynóm 2. stupňa (parabola) má systém nasledujúci tvar

$$\begin{aligned} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n y_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 &= \sum_{i=0}^n y_i x_i, \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 &= \sum_{i=0}^n y_i x_i^2. \end{aligned}$$

Je dôležité si uvedomiť, že aj keď sme uvažovali o minimálnej odchýlke nájdeného polynómu (lineárneho alebo kvadratického) od daných bodov, nemusí tento polynóm skutočne vystihovať reálny charakter daných funkčných bodov najlepšie, keďže nejaká časť variabilty týchto hodnôt môže pripadať na inú ako lineárnu, resp. kvadratickú závislosť (vid. kapitolu o korelačnej analýze).

■ **Príklad 16.1** Preložme bodmi $[1; 0]$, $[2; 0]$, $[3; 4]$, $[4; 5]$, $[5; 4]$ a $[6; 5]$ parabolu.

Zapíšme si hodnoty do tabuľky.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$y_i x_i$	$y_i x_i^2$
0	1	0	1	1	1	0	0
1	2	0	4	8	16	0	0
2	3	4	9	27	81	12	36
3	4	5	16	64	256	20	80
4	5	4	25	125	625	20	100
5	6	5	36	216	1296	30	180
Σ	21	18	91	441	2275	82	396

To znamená, že riešime sústavu

$$\begin{aligned} 6a_0 + 21a_1 + 91a_2 &= 18, \\ 21a_0 + 91a_1 + 441a_2 &= 82, \\ 91a_0 + 441a_1 + 2275a_2 &= 396. \end{aligned}$$

V maticovom zápise

$$\begin{pmatrix} 6 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 82 \\ 396 \end{pmatrix}.$$

Sústavu riešime Cramerovým pravidlom:

$$D = \det \begin{pmatrix} 6 & 21 & 91 \\ 21 & 91 & 441 \\ 91 & 441 & 2275 \end{pmatrix} = 3920,$$

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 18 & 21 & 91 \\ 82 & 91 & 441 \\ 396 & 441 & 2275 \end{pmatrix} = -12936,$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & 18 & 91 \\ 21 & 82 & 441 \\ 91 & 396 & 2275 \end{pmatrix} = 11606,$$

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 6 & 21 & 18 \\ 21 & 91 & 82 \\ 91 & 441 & 396 \end{pmatrix} = -1050,$$

a teda

$$a_0 = \frac{D_1}{D} = \frac{-12936}{3920} \doteq -3.3,$$

$$a_1 = \frac{D_2}{D} = \frac{11606}{3920} \doteq 2.961,$$

$$a_2 = \frac{D_3}{D} = \frac{-1050}{3920} \doteq -0.268.$$

Hľadaný polynóm má tvar

$$p_2(x) = -3.3 + 2.961 \cdot x - 0.268 \cdot x^2.$$

■

17. Numerické integrovanie

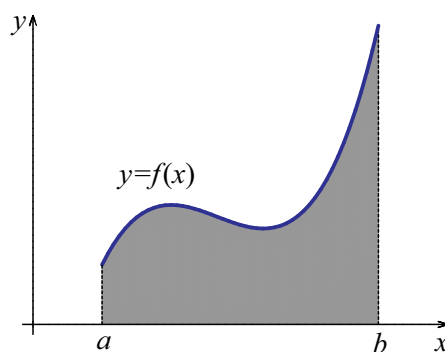
Riešenie určitého integrálu funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$ pomocou známeho Newton-Leibnizovho vzorca

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

je jednoduchá záležitosť pokiaľ poznáme primitívnu funkciu. V praxi sa často stane, že primitívnu funkciu $F(x)$ k funkcii $f(x)$ nevieme nájsť, či svojou zložitostou prestáva mať praktické využitie, alebo dokonca vôbec neexistuje.

My sa zameriame na problematiku výpočtu určitého integrálu $\int_a^b f(x) dx$ z pohľadu jeho geometrickej interpretácie, tj. tento nám určuje obsah plochy vymedzený grafom funkcie $f(x)$ a osou x -ovou v medziach intervalu $x \in \langle a; b \rangle$ (resp.: $a \leq x \leq b$).

Numerický výpočet tohto integrálu budeme nazývať *numerická kvadratura*.



Obr. 17.0.1: Geometrická interpretácia určitého integrálu

17.1 Newton-Cotesove kvadrátúrne vzorce

Táto metóda je založená na nahradení funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a; b \rangle$ interpolačným polynómom s ekvidistantnými uzlami patričného stupňa, ktorý už následne zintegrujeme veľmi ľahko.

Z pohľadu rozmiestnenia určenia polynómu uzlovými bodmi môžeme metódy rozdeliť do dvoch skupín, a to uzavreté vzorce (krajné body intervalu $\langle a; b \rangle$ sú zároveň uzlovými) a otvorené vzorce (krajné body intervalu $\langle a; b \rangle$ nie sú uzlovými bodmi, uzly sú rozmiestnené symetricky okolo stredu intervalu $\langle a; b \rangle$). My sa budeme v ďalšom zaoberať iba metódami uzavretými.

17.1.1 Elementárne uzavreté Newton-Cotesove vzorce

Prejdime rovno k jednotlivým Newton-Cotesovým kvadrátúram.

Elementárne uzavreté lichobežníkové pravidlo

Najjednoduchším uzavretým pravidlom je lichobežníkové pravidlo.

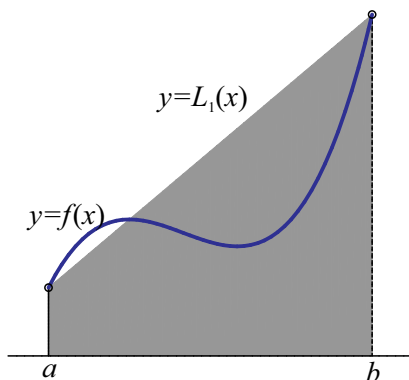
Funkciu $f(x)$ nahradíme na intervale $\langle a; b \rangle$ lineárnym Lagrangeovým interpolačným polynómom

$$L_1(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a},$$

jeho integráciou a použitím jednoduchých úprav, dostávame pre integrál odhad

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b L_1(x) dx = \int_a^b \left(f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a} \right) dx \\ &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)). \end{aligned}$$

Názov metódy pochádza z nahradenia plochy integrálu lichobežníkom s vrcholmi $a, b, f(b), f(a)$.



Obr. 17.1.1: Elementárne uzavreté lichobežníkové pravidlo

Elementárne uzavreté Simpsonovo pravidlo

Prejdime teraz k nahradeniu funkcie $f(x)$ kvadratickým Lagrangeovým interpolačným polynómom, kde stred intervalu $\langle a; b \rangle$ označíme $s = \frac{a+b}{2}$

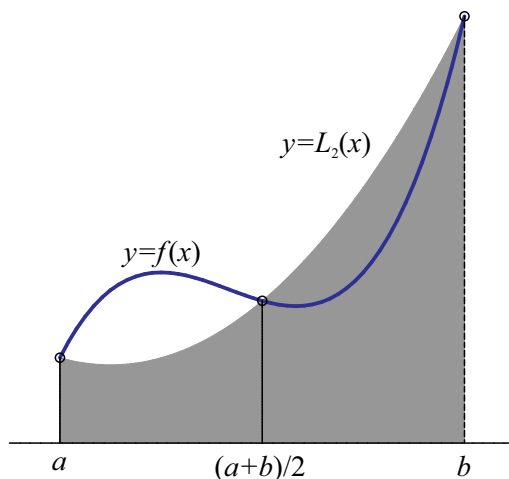
$$L_2(x) = f(a) \cdot \frac{(x-s)(x-b)}{(a-s)(a-b)} + f(s) \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(s-a)(s-b)} + f(b) \cdot \frac{(x-a)(x-s)}{(b-a)(b-s)},$$

Dosadením a následnou integráciou dostávame

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b L_2(x) dx = \dots = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(s) + f(b)) \\ &= \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \end{aligned}$$

Toto pravidlo je trojkrokové (druhého stupňa, keďže $n = 2, i = 0, 1, 2$). Pri označení $a = x_0, s = \frac{a+b}{2} = x_1, b = x_2$ a $f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2$ môžeme pre jednoduchosť písať

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f_0 + 4f_1 + f_2).$$



Obr. 17.1.2: Elementárne uzavreté Simpsonovo pravidlo

Zovšeobecnený elementárny uzavretý Newton-Cotesov vzorec

Týmto istým spôsobom by sme mohli pokračovať a nahrádzať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým interpolačným polynómom príslušného stupňa n

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = (b-a) \sum_{i=0}^n H_i f(x_i),$$

kde H_i sú Cotesove koeficienty a x_i sú uzly, $x_i = a + ih$, kde $h = \frac{b-a}{n}$ a $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

V nasledujúcej tabuľke uvedieme prehľad základných elementárnych Newton-Cotesových vzorcov

stupeň	názov metódy	vzorec
1	lichobežníkové	$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f_0 + f_1)$
2	Simpsonovo	$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} (f_0 + 4f_1 + f_2)$
3	3/8 Simpsonovo	$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$
4	Booleho	$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$

Chyba elementárneho Newton-Cotesových vzorcov

Chyba elementárnych Newton-Cotesových vzorcov priamo závisí na chybe interpolačného polynómu (15.3.1), a to nasledujúcim spôsobom

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n) dx,$$

kde $\xi \in \langle a; b \rangle$. Riešením tohto integrálu dostávame odhad zvlášť pre n párne a n nepárne.

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x \cdot (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n) dx, \quad \text{pre } n \text{ párne,}$$

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n) dx, \quad \text{pre } n \text{ nepárne,}$$

kde $\xi \in \langle a; b \rangle$. Tieto integrály je možné pre konkrétne stupne n vypočítať. V tabuľke uvádzame prehľad chýb elementárnych Newton-Cotesových vzorcov

stupeň	názov metódy	chyba
1	lichobežníkový	$\varepsilon(x) = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi)$
2	Simpsonovo	$\varepsilon(x) = -\frac{(b-a)^5}{90} f^{(4)}(\xi)$
3	3/8 Simpsonovo	$\varepsilon(x) = -\frac{3(b-a)^5}{80} f^{(4)}(\xi)$
4	Booleho	$\varepsilon(x) = -\frac{8(b-a)^7}{945} f^{(6)}(\xi)$

17.1.2 Zložené uzavreté Newton-Cotesove vzorce

Je prirodzené očakávať, že so zvyšujúcim sa počtom podintervalov by sa mala presnosť zvyšovať. Avšak aj z predošlej tabuľky vidno, že vyšší stupeň interpolačného polynómu nezaručuje vyššiu presnosť, nehovoriac o tendencii polynómov vyšších rádov oscilovať mimo uzlových bodov (Rungeho paradox). To viedlo k myšlienke rozdelenia intervalu $\langle a; b \rangle$ na sieť podintervalov a na jednotlivých podintervaloch použiť elementárne Newton-Cotesove vzorce. Pri zachovaní ekvidistantnosti siete, týmto dostávame tzv. *zložené uzavreté Newton-Cotesove vzorce*.

Zložené uzavreté lichobežníkové pravidlo

Rozdelíme interval $\langle a; b \rangle$ na sieť m ekvidistantných podintervalov dĺžky $h = \frac{b-a}{m}$, $x_{i+1} - x_i = h$

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$$

Na každom z týchto podintervalov aplikujeme elementárne lichobežníkové pravidlo. Značíme tak, ako v predošlom, tj. $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x) dx \\ &\approx \frac{h}{2} (f_0 + f_1) + \frac{h}{2} (f_1 + f_2) + \dots + \frac{h}{2} (f_{m-1} + f_m). \end{aligned}$$

Po úprave dostávame

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{m-1} + \frac{1}{2} f_m \right).$$

Chyba na každom z podintervalov $\langle x_{i+1}, x_i \rangle$ je daná vzťahom

$$\varepsilon_i(x) = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi_i),$$

čo pre celkovú chybu predstavuje

$$\varepsilon(x) = -\frac{h^3}{12} \left(f^{(2)}(\xi_1) + f^{(2)}(\xi_2) + \dots + f^{(2)}(\xi_m) \right)$$

Pre spojitú funkciu $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ existuje také $\xi \in \langle a, b \rangle$, že platí

$$m \cdot f^{(2)}(\xi) = f^{(2)}(\xi_1) + f^{(2)}(\xi_2) + \dots + f^{(2)}(\xi_m).$$

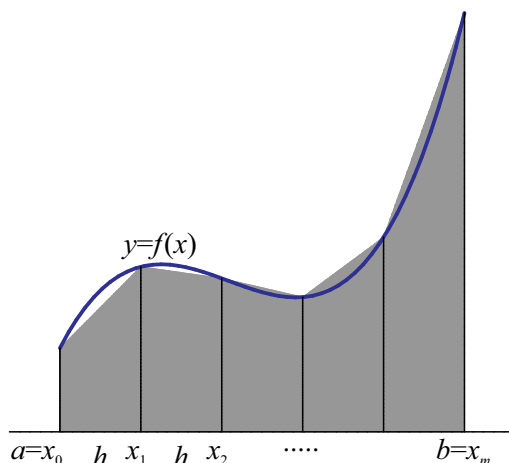
A teda pre odhad chyby zloženého lichobežníkového pravidla platí

$$\varepsilon(x) = -\frac{h^3}{12} m f^{(2)}(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12m^3} m f^{(2)}(\xi) = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f^{(2)}(\xi).$$

Pre praktické účely je však vhodnejšie použiť horný odhad

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2,$$

$$\text{kde } M_2 = \max_{t \in \langle a, b \rangle} |f^{(2)}(t)|.$$



Obr. 17.1.3: Zložené uzavreté lichobežníkové pravidlo

Zložené uzavreté Simpsonovo pravidlo

Podobným spôsobom môžeme odvodiť zložené Simpsonovo pravidlo. Interval $\langle a; b \rangle$ však teraz rozdelíme na párny $m = 2k$ počet podintervalov dĺžky $h = \frac{b-a}{m}$ a na dvojice susedných podintervalov použijeme elementárne Simpsonovo pravidlo, teda interpolačný polynóm druhého stupňa.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx h \left[\left(\frac{1}{3} f_0 + \frac{4}{3} f_1 + \frac{1}{3} f_2 \right) + \left(\frac{1}{3} f_2 + \frac{4}{3} f_3 + \frac{1}{3} f_4 \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{3} f_{m-2} + \frac{4}{3} f_{m-1} + \frac{1}{3} f_m \right) \right] \\ &= \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{m-2} + 4f_{m-1} + f_m). \end{aligned}$$

Chyba zloženého Simpsonovho pravidla je daná výrazom

$$\varepsilon(x) = -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

Jej horný odhad potom je

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{(b-a)^5}{90m^4} M_4,$$

kde $M_4 = \max_{t \in \langle a, b \rangle} |f^{(4)}(t)|$.

■ **Príklad 17.1** Určme približné riešenie určitého integrálu

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3} dx$$

s počtom krokov $m = 6$

- lichobežníkovou metódou,
- Simpsonovou metódou.

Pre $m = 6$ je krok na danom intervale $h = \frac{b-a}{m} = \frac{4-1}{6} = 0.5$. V tabuľke sú uvedené príslušné funkčné hodnoty v uzlových bodoch funkcie.

x_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$f_i = f(x_i)$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4.375}$	3	$\sqrt{16.625}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{43.875}$	$\sqrt{65}$

a) Použitím lichobežníkového pravidla dostávame

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3} dx \approx 0.5 \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{4.375} + 3 + \sqrt{16.625} + \sqrt{28} + \sqrt{43.875} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{65} \right) \\ \doteq 12.911.$$

b) Simpsonovým pravidlom máme pre približné riešenie

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^3} dx \approx \frac{0.5}{3} \left(\sqrt{2} + 4\sqrt{4.375} + 2 \cdot 3 + 4 \cdot \sqrt{16.625} + 2\sqrt{28} + 4 \cdot \sqrt{43.875} + \sqrt{65} \right) \\ \doteq 12.872.$$

■

17.2 Gaussova kvadratura

Je ďalšou možnosťou numerického riešenia určitého integrálu. Jej základom je nahradenie integrálu radom, ktorého sčítance sú súčiny koeficientov a uzlov. Tieto uzly sú korene ortogonálnych polynómov, čo sú špeciálne funkcie s mnohými zaujímavými vlastnosťami. Nasledujúca stať nám v krátkosti niektoré z týchto vlastností priblíži.

17.2.1 Ortogonálne polynómy

Definícia 17.2.1 Postupnosť polynómov $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ nazývame *ortogonálne polynómy s váhovou funkciou* $v(x)$, ak pre stupeň polynómu $\deg(\varphi) = i$ platí

$$\int_a^b \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot v(x) dx = 0, \quad \text{pre } i \neq j.$$

R Množina všetkých polynómov tvorí vektorový priestor, na ktorom je definovaná operácia skalárneho súčinu

$$\langle p(x), q(x) \rangle_{v(x)} = \int_a^b p(x) q(x) v(x) dx,$$

kde každá postupnosť ortogonálnych polynómov tvorí bázu tohto priestoru.

Veta 17.2.1 — Trojčlenný rekurentný vzťah. Monické ortogonálne polynómy vyhovujú tzv. trojčlennému rekurentnému vzťahu

$$\varphi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) \varphi_k(x) - \beta_k \varphi_{k-1}(x),$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, n$, pričom platí

$$\varphi_0(x) = 1,$$

$$\varphi_1(x) = x - \alpha_1,$$

kde koeficienty α_k a β_k sú dané vzťahmi

$$\alpha_k = \frac{\int_a^b x \cdot \varphi_k^2(x) \cdot v(x) dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x) \cdot v(x) dx}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$\beta_k = \frac{\int_a^b \varphi_k^2(x) \cdot v(x) dx}{\int_a^b \varphi_{k-1}^2(x) \cdot v(x) dx}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

R Monický polynóm je polynóm, ktorého koeficient pri najvyššej mocnine premennej x je rovný číslu jedna.

Definícia 17.2.2 Systém normovaných ortogonálnych polynómov

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_{n+1}(x),$$

tj. norma $\|\psi_i(x)\| = 1, \forall i = 0, 1, 2, \dots,$

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\|\varphi_k(x)\|} = \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\int_a^b \varphi_k^2(x) \cdot v(x) dx}}$$

nazývame *systém ortonormálnych polynómov s váhovou funkciou* $v(x)$.

Dôsledok 17.2.2 Trojčlenný rekurentný vzťah pre systém ortonormálnych polynómov má tvar

$$\sqrt{\beta_{k+1}} \cdot \psi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k) \psi_k(x) - \sqrt{\beta_k} \cdot \psi_{k-1}(x),$$

kde

$$\begin{aligned} \psi_{-1}(x) &= 0, \\ \psi_0(x) &= \frac{1}{\beta_0} \end{aligned}$$

a

$$\beta_0 = \int_a^b v(x) dx.$$

Označme $\Phi_n(x)$ ako stĺpcový vektor funkcií tvorený ortonormálnymi polynómami až po stupeň n

$$\Phi_n(x) = \begin{pmatrix} \psi_0(x) \\ \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix},$$

trojčlenný rekurentný vzťah má potom všeobecný tvar zapísaný v maticovom tvare

$$x \cdot \Phi_n(x) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_n} \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \Phi_n(x) + \sqrt{\beta_{n+1}} \cdot \psi_{n+1}(x) \cdot e_n,$$

kde e_n je n -tý stĺpec jednotkovej matice stupňa n .

Označme maticu

$$J_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_n} \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ako Jacobiho maticu. Nech a je koreňom ortonormálneho (a aj ortogonálneho) polynómu $\psi_{n+1}(x)$, tj. $\psi_{n+1}(a) = 0$. Potom má trojčenný rekurentný vzťah v maticovom zápise tvar

$$a \cdot \Phi_n(a) = J_{n+1} \cdot \Phi_n(a)$$

čo je tvar maticovej rovnice vlastných čísel a vektorov matice J_{n+1} . Teda $\Phi_n(a)$ sú vlastné vektory matice J_{n+1} prislúchajúce vlastným číslam a matice J_{n+1} .

17.2.2 Klasické ortogonálne polynómy

Uvedme teraz niekoľko typov tzv. *klasických ortogonálnych polynómov*.

Legendreove polynómy

váhová funkcia

$$v(x) = 1,$$

interval ortogonalít

$$x \in \langle -1; 1 \rangle,$$

rekurentný vzťah

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} \cdot x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} \cdot P_{n-1}(x).$$

$$P_0(x) = 0,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

$$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8},$$

$$P_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}x,$$

atď..

Čebyševove polynómy 1. druhu

váhová funkcia

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

interval ortogonality

$$x \in \langle -1; 1 \rangle,$$

rekurentný vzťah

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

atď..

Čebyševove polynómy 2. druhu

váhová funkcia

$$v(x) = \sqrt{1-x^2},$$

interval ortogonality

$$x \in \langle -1; 1 \rangle,$$

rekurentný vzťah

$$U_{n+1}(x) = 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x).$$

$$U_0(x) = 1,$$

$$U_1(x) = 2x,$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x,$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x,$$

atď..

Laguerreove polynómy

váhová funkcia

$$v(x) = e^{-x},$$

interval ortogonality

$$x \in \langle 0; \infty \rangle,$$

rekurentný vzťah

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1-x}{n+1} \cdot L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x).$$

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1, \\
L_1(x) &= -x + 1, \\
L_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1, \\
L_3(x) &= \frac{-1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1, \\
L_4(x) &= \frac{1}{24}x^4 - 16x^3 + 3x^3 - 4x + 1, \\
&\text{atď..}
\end{aligned}$$

Hermiteove polynómy

váhová funkcia

$$v(x) = e^{-x^2},$$

interval ortogonalita

$$x \in (-\infty; \infty),$$

rekurentný vzťah

$$H_{n+1}(x) = x \cdot H_n(x) - H'_n(x).$$

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, \\
H_1(x) &= 2x, \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^3 + 12, \\
&\text{atď..}
\end{aligned}$$

17.2.3 Gaussova kvadrátúrna formula

Prejdime teraz k samotnému odvodeniu Gaussovej kvadratúry.

Pre Gaussovu kvadrátúrnú formu platí

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{i,j} \cdot f^{(i-1)}(a_{i,j}) = \varepsilon(f), \quad (17.2.1)$$

kde výraz $\varepsilon(f)$ označuje chybu tejto kvadratúry. Koeficienty $A_{i,j}$ a body $a_{i,j}$ volíme tak, aby chyba bola minimálna.

Predpokladáme $m = 1$ teda, že aproximácia nezávisí na deriváciách funkcie $f(x)$, a teda Gaussova kvadrátúrna formula (17.2.1) má tvar

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^n A_j \cdot f(a_j) + \varepsilon(f),$$

použitím váhovej funkcie dostávame

$$\int_a^b f(x) \cdot v(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j \cdot f(a_j).$$

Pri aproximácii integrálu volíme celkovo $2n$ konštánt (n koeficientov A_j a n uzlových bodov a_j). Najvyšší stupeň presnosti je teda $(2n - 1)$.

Veta 17.2.3 Nech kvadráturňa formula má tvar

$$Q(f) = \sum_{j=1}^n A_j \cdot f(a_j)$$

a nech $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ tvorí systém ortogonálnych polynómov na intervale ortogonalít $\langle a; b \rangle$ vzhľadom na váhovú funkciu $v(x)$.

Potom táto formula má stupeň presnosti $(2n - 1)$ práve vtedy, keď uzly tejto formuly sú korene ortogonálnych polynómov $\varphi_n(x)$.

R Ak uzly a_j sú korene ortogonálneho polynómu $\varphi_n(x)$ príslušného stupňa, koeficienty Gaussovej kvadratury A_j môžeme vypočítať:

1. *metódou neurčitých koeficientov*

$$\int_a^b x^k \cdot v(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j \cdot a_j^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

2. *integráciou interpolačného polynómu*

$$A_j = \int_a^b \varphi_j(x) \cdot v(x) dx.$$

Gauss-Legendreova kvadratická formula

Legendreove polynómy sú ortogonálne polynómy na intervale ortogonalít $\langle -1; 1 \rangle$ s váhovou funkciou $v(x) = 1$ a pre koeficienty Gaussovej kvadratury platí

$$A_j = \frac{2(1 - a_j^2)}{n^2 (P_{n-1}(a_j))^2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

n	uzly a_j	koeficienty A_j
2	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	1
3	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	± 0.339981 ± 0.861136	0.652145 0.347855
5	0 ± 0.538469 ± 0.906180	0.568889 0.478659 0.236927

■ **Príklad 17.2** Pomocou Gauss-Legendreovej kvadratury pre $n = 3$ odhadneme

$$\int_1^3 \ln x dx.$$

Je potrebné zmeniť interval $\langle -1; 1 \rangle$ substitúciou $x = t + 2$. Korene Legendreového polynómu stupňa $n = 3$ sú

$$a_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Koeficienty Gauss-Legendreovej kvadratúry vypočítame podľa vyššie uvedeného vzťahu, kde dosádzame do Legendreovho polynómu druhého stupňa

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Hodnoty koeficientov sú

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2(1-a_1^2)}{3^2(P_2(a_1))^2} = \frac{2\left(1 - \left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2\right)}{3^2\left(\frac{3}{2}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{9}, \\ A_2 &= \frac{2(1-a_2^2)}{3^2(P_2(a_2))^2} = \frac{2(1-0)}{3^2\left(\frac{3}{2}0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{8}{9}, \\ A_3 &= \frac{2(1-a_3^2)}{3^2(P_2(a_3))^2} = \frac{2\left(1 - \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2\right)}{3^2\left(\frac{3}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Teraz môžeme pristúpiť k výpočtu samotného odhadu integrálu pomocou Gauss-Legendreovej kvadratúrnej formuly

$$\begin{aligned} \int_1^3 \ln(t+1) dt &\approx \frac{5}{9} \cdot f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} \cdot f(0) + \frac{5}{9} \cdot f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\ &= \frac{5}{9} \cdot \ln\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\right) + \frac{8}{9} \cdot \ln 2 + \frac{5}{9} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + 2\right) \\ &\doteq 1.2960. \end{aligned}$$

Pre porovnanie hodnota exaktného riešenia je $(3 \ln 2 - 2) \doteq 1.2958$. ■

Gauss-Čebyševova kvadratická formula 1. druhu

Čebyševove polynómy 1. druhu sú ortogonálne polynómy na intervale ortogonalít $\langle -1; 1 \rangle$ s váhovou funkciou $v(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a pre koeficienty jej Gaussovej kvadratúry platí

$$A_j = \frac{\pi}{n}, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

n	uzly a_j	koeficienty A_j
2	$\pm \frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
3	0 $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
4	± 0.92386 ± 0.38268	$\frac{\pi}{4}$

■ **Príklad 17.3** Využitím Gauss-Čebyševovej kvadratickej formuly 1. druhu odhadnime

$$\int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Korene $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ sú

$$a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Koeficienty sú

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{\pi}{3}.$$

Odhad je

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &\approx \frac{\pi}{3} \cdot f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\pi}{3} \cdot f(0) + \frac{\pi}{3} \cdot f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\doteq 4.93480. \end{aligned}$$

Presné riešenie je $\frac{\pi^2}{2} \doteq 4.93480$. ■

Gauss-Laguerreova kvadratická formula

Laguerreove polynómy sú ortogonálne polynómy na nekonečnom intervale ortogonalita $\langle 0; \infty \rangle$ s váhovou funkciou

$$v(x) = e^{-x}.$$

n	uzly a_j	koeficienty A_j
2	$2 - \sqrt{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$
	$2 + \sqrt{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{4}$
3	0.415775	0.711093
	2.294280	0.278518
	6.289945	0.010389
4	0.322548	0.603154
	1.745761	0.357419
	4.536620	0.038888
	9.395071	0.000539
5	0.263560	0.521756
	1.413403	0.398667
	3.596426	0.075942
	7.085810	0.003612
	12.640801	0.000023

■ **Príklad 17.4** Odhadnime pre $n = 2$

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot \sin x dx.$$

Koeficienty vypočítame integráciou interpolačného polynómu $L_2(x)$ ktorého korene $a_1 = 2 - \sqrt{2}, a_2 = 2 + \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{x - 2 - \sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} dx = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \\ A_2 &= \int_0^\infty e^{-x} \frac{x - 2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} dx = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Odhadneme hodnotu integrálu

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x} \cdot \sin x dx &\approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} \cdot f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} \cdot f(2+\sqrt{2}) = \\ &\doteq 0.432459.\end{aligned}$$

Presné riešenie je $\frac{1}{2} = 0.5$.

■

18. Numerické riešenie diferenciálnych rovníc

Diferenciálne rovnice, nazývané aj rovnice matematickej fyziky, opisujú matematické modely fyzikálnych javov. S ich analytickou riešiteľnosťou sa študenti oboznámili v nižších ročníkoch v kurzoch matematickej analýzy, kde si osvojili metódy riešenia istých typov diferenciálnych rovníc. V živote a v praxi sa však vyskytujú rovnice zložitejšie, ktorých analytická riešiteľnosť je často náročná alebo dokonca nemožná. Vhodný nástroj na riešenie takýchto situácií ponúka numerická matematika formou približných riešení, ktorými sa teraz budeme zaoberať.

Metodiku vysvetlíme na riešení jednej diferenciálnej rovnice prvého rádu s danou počiatočnou podmienkou - Cauchyho počiatočná úloha. Následne ukážeme možnosti zovšeobecnenia pre riešenie sústav diferenciálnych rovníc prvého rádu. Ukážeme tiež, že diferenciálnu rovnicu vyšších rádoov so zadanými počiatočnými podmienkami je možné ľahko previesť na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu.

Pri všetkých z nasledujúcich metód budeme hľadať iba približné hodnoty v konečnom počte tzv. *uzlových bodov* $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ namiesto funkcií spojitých na intervale $\langle a, b \rangle$, ako je tomu pri analytickom riešení. Množine uzlových bodov $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ hovoríme *sieť* a rozdiel $h_i = x_{i+1} - x_i$ sa nazýva *krok siete* v uzli x_i .

Približné hodnoty riešenia v uzlových bodoch, vypočítané numericky, budeme značiť $y_0, y_1, \dots, y_n$, na rozdiel od hodnôt presného riešenia, ktoré značíme $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_n)$ (viď obrázok).

V ďalšom sa podobne ako v príklade na obrázku budeme zaoberať iba prípadmi, kedy bude krok h medzi jednotlivými uzlami konštantný, tj. *pravidelná (ekvidištančná) sieť*.

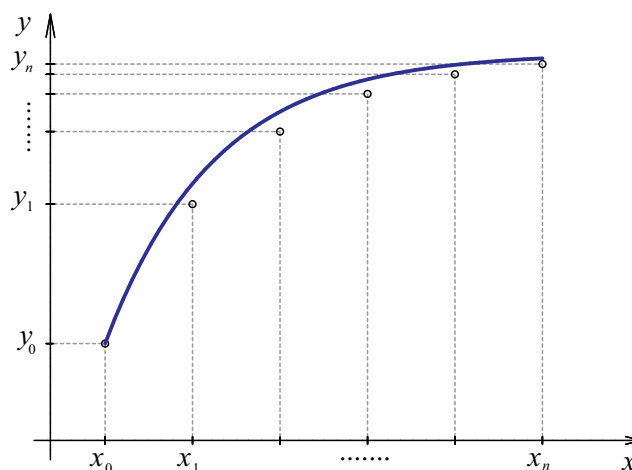
Ak by sme potrebovali lomenú čiaru približných riešení nahradiť funkciou spojitou aj s prvou deriváciou (hladkou krivkou), resp. vedieť hodnotu v inom ako uzlovom bode použijeme niektorý z interpolačných polynómov.

18.0.1 Cauchyho počiatočná úloha

Upriamme teraz pozornosť na obyčajnú diferenciálnu rovnicu prvého rádu s danou počiatočnou podmienkou

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (18.0.1)$$

takáto diferenciálna rovnica s takouto počiatočnou podmienkou sa nazýva *Cauchyho počiatočná úloha*.



Obr. 18.o.1: Presné a približné riešenie diferenciálnej rovnice v uzlových bodoch

Uvedme ešte podmienky riešiteľnosti úlohy (18.o.1).

Veta 18.0.1 Nech je funkcia $f(x, y)$ spojitá na obdĺžniku

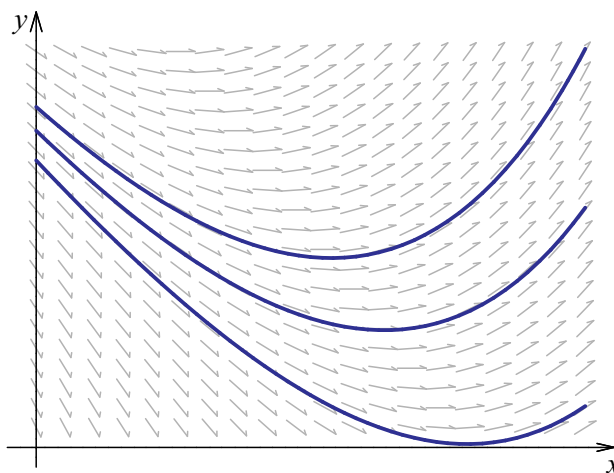
$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

kde $a > 0, b > 0$.

Potom existuje riešenie počiatkovej úlohy (18.o.1) na intervale $\langle x_0 - \alpha, x_0 + \alpha \rangle$, kde $\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, $M = \max |F(x, y)|$.

Ak je navyše derivácia tejto funkcie $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ ohraničená na obdĺžniku D , potom je toto riešenie jediné.

Táto veta určuje iba postačujúcu podmienku existencie jediného riešenia, a tiež vo veľkom počte prípadov zaručuje existenciu a jednoznačnosť iba v malom okolí bodu x_0 . V technickej praxi sa preto existencia a jednoznačnosť riešenia často posudzuje i na základe informácií o riešenej úlohe, poprípade fyzikálnych vlastností hľadaného riešenia.



Obr. 18.o.2: Smerové pole dané diferenciálnou rovnicou

18.1 Eulerova metóda

Je najjednoduchšou metódou na hľadanie približného riešenia Cauchyho úlohy typu (18.0.1). Predpokladajme pravidelnú sieť, tj. ekvidištantné rozmiestnenie uzlových bodov $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ s krokom h . Vo všetkých bodoch siete teda podľa (18.0.1) zrejme platí

$$y'(x_i) = F(x_i, y(x_i)).$$

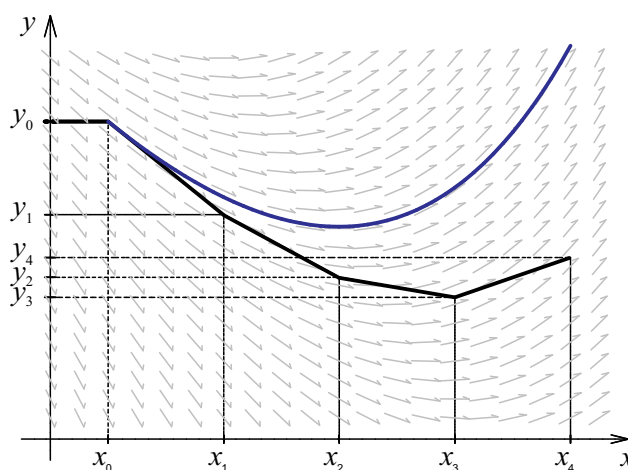
Deriváciu na ľavej strane nahradíme numerickou deriváciou a dostávame

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = F(x_i, y(x_i)).$$

Nahradíme $y(x_i)$ približnou hodnotou y_i , môžeme vyjadriť približnú hodnotu pre $y(x_{i+1})$ ako

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot F(x_i, y_i). \quad (18.1.1)$$

Tým dostávame vzťah, ktorým vypočítame približnú hodnotu v nasledujúcom uzlovom bode pomocou hodnôt v predošlom uzlovom bode.



Obr. 18.1.1: Približné riešenie diferenciálnej rovnice Eulerovou metódou

■ **Príklad 18.1** Pomocou Eulerovej metódy riešme Cauchyho počiatočnú úlohu

$$y' = x^2 - y, \quad y(0) = 1$$

na intervale $\langle 0; 0.5 \rangle$ s krokom $h = 0.1$.

Zrejme $x_0 = 0, y_0 = 1$ a $F(x, y) = x^2 - y$. Približné hodnoty riešenia v nasledujúcich uzlových bodoch budeme počítať podľa vzťahu (18.1.1), teda

$$y_{i+1} = y_i + 0.1 \cdot (x_i^2 - y_i), \quad i = 0, 1, \dots, 5.$$

Vypočítané hodnoty zapíšeme do tabuľky.

$i :$	0	1	2	3	4	5
$x_i :$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y_i :$	1	0.9	0.811	0.7339	0.6695	0.6186

Pre porovnanie uvedieme aj hodnoty presného riešenia $y = -e^{-x} + x^2 - 2x + 2$ v uzlových bodoch

$y(x_i) :$	1	0.905	0.8213	0.7492	0.6897	0.6435
------------	---	-------	--------	--------	--------	--------

■

Z uvedeného je zrejmé, že presnosť s narastajúcim počtom uzlových bodov klesá a takisto je zrejmé, že presnosť podstatne závisí aj od kroku h .

Veta 18.1.1 Hovoríme, že metóda je konvergentná, pokiaľ pre ľubovoľnú Cauchyho počiatočnú úlohu (18.0.1) platí pre každé $x \in \langle a, b \rangle$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0}} y_n = y(x), \quad \text{kde } x = x_0 + nh.$$

18.2 Modifikovaná Eulerova metóda

Ako je z názvu metódy zrejmé, jedná sa o isté vylepšenie Eulerovej metódy.

Najskôr vypočítame pomocné hodnoty k_1 a k_2 a pomocou nich potom približnú hodnotu riešenia v ďalších uzlových bodoch.

V prípade *prvej modifikovanej Eulerovej metódy* počítame podľa vzťahov

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right), \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot k_2. \end{aligned} \quad (18.2.1)$$

a u *druhej modifikovanej Eulerovej metódy*

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_1), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{2}h \cdot (k_1 + k_2). \end{aligned} \quad (18.2.2)$$

18.3 Metóda Runge-Kutta 4. rádu

Metódy typu Runge-Kutta patria k jedným z najdôležitejších skupín jednokrokových metód. Obe z modifikovaných Eulerových metód patria tiež k metódam typu Runge-Kutta. Uvedieme najčastejšie uvádzanú a najpoužívanejšiu z metód typu Runge-Kutta (zvedavajšieho čitateľa odkážeme na pramene, ktoré si dúfame sám dokázať), a to metódu Runge-Kutta 4. rádu. Je všeobecne tolerovanou mýlkou považovať za metódu Runge-Kutta práve túto z jej nespočetného množstva variant

$$\begin{aligned} k_1 &= F(x_i, y_i), \\ k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1\right), \\ k_3 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_2\right), \\ k_4 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_3), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \quad (18.3.1)$$

■ **Príklad 18.2** Pomocou metódy Runge-Kutta 4. rádu riešime Cauchyho počiatočnú úlohu

$$y' = x^2 - y, \quad y(0) = 1$$

na intervale $\langle 0; 0.5 \rangle$ s krokom $h = 0.1$.

V každom kroku musíme vypočítať štyri koeficienty k_1, k_2, k_3 a k_4 a pomocou nich potom približné hodnoty v ďalších uzlových bodoch dosadením do (18.3.1). Výsledky zapíšeme do tabuľky, v ktorej uvedieme aj hodnoty presného riešenia $y(x_n)$, tak ako tomu bolo v predošlom príklade

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	x	y	
0	0	1	1	0	1	$k_1 = -1$
				0.05	0.95	$k_2 = -0.9475$
				0.05	0.952625	$k_3 = -0.950125$
				0.1	0.9049875	$k_4 = -0.8949875$
1	0.1	0.9051672	0.9051626	0.1	0.9051627	$k_1 = -0.8951627$
				0.15	0.8604046	$k_2 = -0.8379046$
				0.15	0.8632675	$k_3 = -0.8407675$
				0.2	0.8210860	$k_4 = -0.7810860$
2	0.2	0.8212695	0.8212693	0.2	0.8212695	$k_1 = -0.7812695$
				0.25	0.7822060	$k_2 = -0.7197060$
				0.25	0.7852842	$k_3 = -0.7227842$
				0.3	0.7489911	$k_4 = -0.6589911$
3	0.3	0.7491822	0.7491818	0.3	0.7491822	$k_1 = -0.6591822$
				0.35	0.7162230	$k_2 = -0.5937230$
				0.35	0.7194960	$k_3 = -0.5969960$
				0.4	0.6894826	$k_4 = -0.5294826$
4	0.4	0.6896804	0.6896800	0.4	0.6896804	$k_1 = -0.5296804$
				0.45	0.6631964	$k_2 = -0.4606964$
				0.45	0.6666456	$k_3 = -0.4641456$
				0.5	0.6432659	$k_4 = -0.3932659$
5	0.5	0.6434699	0.6434693			

■

18.4 Viackrokové metódy riešenia diferenciálnych rovníc

Viackrokové metódy riešenia Cauchyho počiatkovej úlohy delíme v zásade na dva typy podľa princípu vyjadrenia vzťahu, a to na explicitné a implicitné formuly.

Dodržiavame doteraz používané označenie. Je daná sieť

$$x_{i+1} = x_i + h, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Explicitná viackroková formula bude mať vo všeobecnosti tvar

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi \left(f; \underbrace{y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-(k-1)}}_{k \text{ hodnôt}} \right)$$

a *implicitná viackroková formula* má tvar

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi \left(f; \underbrace{y_{i+1}, y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-(k-1)}}_{k+1 \text{ hodnôt}} \right).$$

Hlavná idea viackrokových metód spočíva v použití Newton-Cotesových vzorcov na riešenie čiastkovej Cauchyho počiatkovej úlohy $y' = f(x, y)$ na intervale $\langle x_{m+1-k}; x_{m+1} \rangle$, tj. riešenie integrálnej rovnice tvaru

$$\int_{x_{m+1-k}}^{x_{m+1}} y' dx = \int_{x_{m+1-k}}^{x_{m+1}} f(x, y) dx,$$

odkiaľ dostávame

$$y(x_{m+1}) - y(x_{m+1-k}) = \int_{x_{m+1-k}}^{x_{m+1}} f(x, y) dx.$$

Na pravej strane rovnosti využijeme Newton-Cotesove formule (interpoláčnym polynómom stupňa n) s $k+1$ rovnomerne rozloženými uzlami.

1. $k=2, n=0$

Použitím obdĺžnikového pravidla¹

$$\int_a^b u(x) dx \approx (b-a) \cdot u\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

dostávame

$$y(x_{m+1}) - y(x_{m-1}) \approx 2h \cdot f(x_m, y(x_m)).$$

Čím dostávame explicitnú dvojkrokovú metódu

$$y_{m+1} = y_{m-1} + 2h \cdot f(x_m, y_m),$$

ktorej chyba $O(h^2)$ je rádu, tj. závisí od druhej mocniny kroku h .

2. $k=1, n=1$

Použitím lichobežníkového pravidla

$$\int_a^b u(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \cdot (u(a) + u(b)),$$

dostávame

$$y(x_{m+1}) - y(x_m) \approx \frac{h}{2} \cdot (f(x_m, y(x_m)) + f(x_{m+1}, y(x_{m+1}))).$$

Odkiaľ dostávame implicitnú jednokrokovú metódu

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot (f_m + f_{m+1}) + O(h^3),$$

kde označíme $f_m = f(x_m, y(x_m))$ (podobne i v nasledujúcom).

3. $k=4, n=2$

Použitím otvoreného Simpsonovho pravidla

$$\int_a^b u(x) dx \approx \frac{b-a}{3} \cdot (2u_1 - u_2 + 2u_3),$$

dostávame

$$y(x_{m+1}) - y(x_{m-3}) \approx \frac{4h}{3} \cdot (2f_{m-2} - f_{m-1} + 2f_m).$$

Explicitná štvorkroková metóda má tvar

$$y_{m+1} = y_{m-3} + \frac{4h}{3} \cdot (2f_{m-2} - f_{m-1} + 2f_m) + O(h^5).$$

¹Otvorené Newton-Cotesove pravidlo.

4. $k = 2, n = 2$

Použitím uzavretého Simpsonovho pravidla

$$\int_a^b u(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot (u_0 + 4u_1 + 2u_2),$$

dostávame

$$y(x_{m+1}) - y(x_m) \approx \frac{2h}{6} \cdot (f_{m-1} + 4f_m + f_{m+1}).$$

Implicitná dvojkroková metóda má tvar

$$y_{m+1} = y_{m-3} + \frac{h}{3} \cdot (f_{m-1} + 4f_m + f_{m+1}) + O(h^5).$$

18.4.1 Adams-Bashforthove metódy

Adams-Bashforthove extrapoláčnne metódy sú explicitné metódy

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{2} \cdot (3f_m - f_{m-1}) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(\xi), \\ y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{12} \cdot (23f_m - 16f_{m-1} + 5f_{m-2}) + \frac{5h^3}{12} f^{(3)}(\xi), \\ y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{24} \cdot (55f_m - 59f_{m-1} + 37f_{m-2} - 9f_{m-3}) + \frac{3h^4}{8} f^{(4)}(\xi), \\ y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{720} \cdot (1901f_m - 2774f_{m-1} + 2616f_{m-2} - 1274f_{m-3} + 251f_{m-4}) \\ &\quad + \frac{95h^5}{2888} f^{(6)}(\xi). \end{aligned}$$

18.4.2 Adams-Moultenove metódy

Adams-Moultenové interpolačné metódy sú implicitné metódy

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + h \cdot f_{m+1} - \frac{h^2}{2} f^{(2)}(\xi), \\ y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{2} \cdot (f_m + f_{m+1}) - \frac{h^3}{12} f^{(3)}(\xi), \\ y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{12} \cdot (5f_{m+1} + 8f_m - f_{m-1}) - \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi), \\ y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{24} \cdot (9f_{m+1} + 19f_m - 5f_{m-1} + f_{m-2}) - \frac{19h^5}{720} f^{(6)}(\xi), \\ y_{m+1} &= y_m + \frac{h}{720} \cdot (251f_{m+1} + 646f_m - 264f_{m-1} + 106f_{m-2} - 19f_{m-3}) \\ &\quad - \frac{3h^5}{160} f^{(6)}(\xi). \end{aligned}$$

18.4.3 Metódy prediktor-korektor

V predošlom sme si mohli všimnúť jednu zaujímavosť, pri explicitných metódach mala chyba kladné znamienko, zatiaľ čo pri implicitných metódach bola chyba metódy záporná. To nás privádza k myšlienke eliminácie chyby kombináciou explicitnej a implicitnej metódy.

Metóda prediktor-korektor je dvojkrokový algoritmus:

Predikčný krok: iníciaia - explicitnou metódou získame prvotný odhad hodnoty v nasledujúcom kroku.

Korekčný krok: následne implicitnou metódou skorigujeme chybu v tom istom kroku.
Všeobecný tvar viackrokovej metódy je

$$y_{m+1} = a_0 y_m + a_1 y_{m-1} + \dots + a_{k-1} y_{m-(k-1)} + h \cdot b_{-1} \cdot f_{m+1} + h (b_0 f_m + b_1 f_{m-1} + \dots + b_{k-1} f_{m-(k-1)}).$$

koefficient b_{-1} je dôležitý z pohľadu typológie metódy.

Ak je $b_{-1} = 0$, metóda je explicitná.

Ak je $b_{-1} \neq 0$, metóda je implicitná.

Všeobecný tvar viackrokovej metódy môžeme zapísať i v tvare

$$y_{m+1} - a_0 y_m - a_1 y_{m-1} - \dots - a_{k-1} y_{m-(k-1)} = h (b_{-1} \cdot f_{m+1} + b_0 f_m + b_1 f_{m-1} + \dots + b_{k-1} f_{m-(k-1)}). \quad (18.4.1)$$

Označme nasledujúce polynómy

$$P_k(t) = t^k - a_0 t^{k-1} - a_1 t^{k-2} - \dots - a_{k-2} t - a_{k-1},$$

ako *prvý charakteristický polynóm viackrokovej metódy* (18.4.1) a

$$Q_k(t) = b_{-1} t^k + b_0 t^{k-1} + b_1 t^{k-2} + \dots + b_{k-2} t + b_{k-1},$$

ako *druhý charakteristický polynóm viackrokovej metódy* (18.4.1).

Definícia 18.4.1 Viackrová metóda (18.4.1) je *stabilná* pre všetky funkcie $f(x, y)$ splňujúce Lipschitzovskú podmienku, ak pre korene jej prvého charakteristického polynómu $P_k(t)$ platí

$$|t_s| < 1, \text{ alebo ak } |t_s| = 1,$$

potom t_s je jednoduchý koreň.

Definícia 18.4.2 Viackrová metóda (18.4.1) je *konzistentná*, ak platí

$$P_k(1) = 0 \quad \wedge \quad P'_k(1) = Q_k(1).$$

■ **Príklad 18.3** Majme viackrovú metódu

$$y_{m+1} = -4y_m + 5y_{m-1} + h(4f_m + 2f_{m-1}).$$

Metóda je dvojkrová a pre jej prvý charakteristický polynóm platí

$$P_2(t) = t^2 + 4t - 5,$$

ktorej korene sú $t_1 = 1$ a $t_2 = -5$. Vidíme, že metóda je nestabilná.

Ďalej platí

$$\begin{aligned} P_2(1) &= 0, \\ P'_2(t) &= 2t + 4, \\ Q_2(t) &= 0t^2 + 4t + 2. \end{aligned}$$

Čiže

$$P'_2(1) = 6 = Q_2(1)$$

a metóda je teda konzistentná. ■

■ **Príklad 18.4** Je daný Hammingov korektor

$$y_{m+1} = \frac{9}{8}y_m - \frac{1}{8}y_{m-2} + \frac{3h}{2}(f_{m+1} + 2f_m - f_{m-1}).$$

Metóda je trojkroková a jej prvý charakteristický polynóm je

$$P_3(t) = t^3 - \frac{9}{8}t^2 + \frac{1}{8}.$$

Jej korene sú $t_1 = 1$ a $t_2 = \frac{1}{16} \pm \frac{1}{16}\sqrt{33}$, a preto je metóda stabilná.

Ďalej

$$P_3(1) = 0$$

$$P'_3(t) = 3t + \frac{9}{4},$$

$$P'_3(1) = \frac{3}{4},$$

$$Q_3(t) = \frac{3}{8}t^3 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{8}t,$$

$$Q_3(1) = \frac{3}{4}.$$

Odkiaľ

$$P'_3(1) = \frac{3}{4} = Q_3(1),$$

tým pádom je metóda aj konzistentná. ■

Veta 18.4.1 Viackroková metóda (18.4.1) konverguje pre všetky funkcie $f(x, y)$ splňujúce Lipschitzovskú podmienku práve vtedy, ak je stabilná a konzistentná.

18.5 Riešenie sústav diferenciálnych rovníc

Riešenie sústav obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y'_1 &= F_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_1(x_0) &= \eta_1, \\ y'_2 &= F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_2(x_0) &= \eta_2, \\ &\vdots & &\vdots \\ y'_n &= F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= \eta_n \end{aligned} \tag{18.5.1}$$

sa hľadá podobne ako riešenie jednej diferenciálnej rovnice s počiatočnou podmienkou.

Systém (18.5.1) môžeme vektorovo prepísať ako

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x_0) = \boldsymbol{\eta},$$

kde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ a $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$.

Na riešenie takejto sústavy môžeme použiť ktorúkoľvek z horeuvedených metód, len je potrebné pracovať s vektormi.

Eulerova metóda pre systém je v tvare

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{F}(x_i, \mathbf{y}_i), \tag{18.5.2}$$

Runge-Kutta metóda 4. rádu pre sústavu má nasledovný tvar

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_1 &= \mathbf{F}(x_i, \mathbf{y}_i), \\
 \mathbf{k}_2 &= \mathbf{F}\left(x_i + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_i + \frac{1}{2}h \cdot \mathbf{k}_1\right), \\
 \mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}\left(x_i + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_i + \frac{1}{2}h \cdot \mathbf{k}_2\right), \\
 \mathbf{k}_4 &= \mathbf{F}(x_i + h, \mathbf{y}_i + h \cdot \mathbf{k}_3), \\
 \mathbf{y}_{i+1} &= \mathbf{y}_i + \frac{1}{6}h \cdot (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4).
 \end{aligned} \tag{18.5.3}$$

V prípade, že riešime sústavu dvoch rovníc, je jednoduchšie neznáme funkcie označiť y a z a pravé strany F a G , aby sme sa vyhli komplikovanej indexácii. Sústava má potom tvar

$$\begin{aligned}
 y' &= F(x, y, z), & y(x_0) &= y_0, \\
 z' &= G(x, y, z), & z(x_0) &= z_0,
 \end{aligned}$$

Eulerovu metódu môžeme potom zapísať v tvare

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + h \cdot F(x_i, y_i, z_i), \\
 z_{i+1} &= z_i + h \cdot G(x_i, y_i, z_i).
 \end{aligned}$$

a metóda Runge-Kutta 4. rádu

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}h \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\
 z_{i+1} &= z_i + \frac{1}{6}h \cdot (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),
 \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= F(x_i, y_i, z_i), \\
 l_1 &= G(x_i, y_i, z_i), \\
 k_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1, z_i + \frac{1}{2}h \cdot l_1\right), \\
 l_2 &= G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_1, z_i + \frac{1}{2}h \cdot l_1\right), \\
 k_3 &= F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_2, z_i + \frac{1}{2}h \cdot l_2\right), \\
 l_3 &= G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h \cdot k_2, z_i + \frac{1}{2}h \cdot l_2\right), \\
 k_4 &= F(x_i + h, y_i + h \cdot k_3, z_i + h \cdot l_3), \\
 l_4 &= G(x_i + h, y_i + h \cdot k_3, z_i + h \cdot l_3).
 \end{aligned}$$

18.6 Riešenie diferenciálnych rovníc vyššieho rádu

Obyčajnú diferenciálnu rovnicu n -tého rádu s počiatočnými podmienkami

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

s podmienkami

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

môžeme previesť na sústavu diferenciálnych rovníc prvého rádu, a to nasledujúcim spôsobom.

Označíme $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$. Potom zrejme platí, že $y_1' = y_2, y_2' = y_3$ atď.. Podľa zadanej diferenciálnej rovnice má platiť

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

čo pri novom označení má tvar

$$y_n' = F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n).$$

Tým sme získali sústavu n diferenciálnych rovníc prvého rádu

$$\begin{array}{ll} y_1' &= y_2, & y_1(x_0) &= y_0, \\ y_2' &= y_3, & y_2(x_0) &= y_0', \\ &\vdots & &\vdots \\ y_n' &= F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) & y_n(x_0) &= y_0^{(n-1)}, \end{array} \quad (18.6.1)$$

ktorú riešime ľubovoľnou z uvedených metód. Riešenie pôvodnej rovnice n -tého rádu je potom prvá zložka riešenia sústavy (18.6.1).



19. Přílohy

19.1 Tabuľky základných rozdelení pravdepodobnosti

Uvedieme štatistické tabuľky základných rozdelení pravdepodobnosti, a to Studentovo t -rozdelenie, χ^2 rozdelenie a normálneho normované rozdelenia $N(0; 1)$.

$n :$	$t_{0.90}^{(n)}$	$t_{0.95}^{(n)}$	$t_{0.975}^{(n)}$	$t_{0.995}^{(n)}$	$n :$
1	3.078	6.314	12.706	63.657	1
2	1.886	2.92	4.307	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	4.032	5
6	1.44	1.943	2.447	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	3.499	7
8	1.397	1.86	2.306	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	3.250	9
10	1.372	1.813	2.228	3.169	10
11	1.363	1.8	2.201	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	3.055	12
13	1.35	1.771	2.160	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.977	14
15	1.34	1.753	2.131	2.947	15
16	1.337	1.746	2.12	2.921	16
17	1.333	1.74	2.11	2.898	17
18	1.33	1.734	2.101	2.878	18
19	1.33	1.73	2.1	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.845	20
21	1.323	1.721	2.08	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.797	24
25	1.316	1.708	2.06	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.756	29
30	1.31	1.697	2.042	2.750	30

Kritické hodnoty Studentovho t -rozdelenia

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	
0	0.5	0.504	0.508	0.512	0.516	0.52	0.524	0.528	0.532	0.536	0
0.1	0.54	0.544	0.548	0.552	0.556	0.56	0.564	0.567	0.571	0.575	0.1
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.595	0.599	0.603	0.606	0.61	0.614	0.2
0.3	0.618	0.622	0.626	0.629	0.633	0.637	0.641	0.644	0.648	0.652	0.3
0.4	0.655	0.659	0.663	0.666	0.67	0.674	0.677	0.681	0.684	0.688	0.4
0.5	0.691	0.695	0.698	0.702	0.705	0.709	0.712	0.716	0.719	0.722	0.5
0.6	0.726	0.729	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755	0.6
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.77	0.773	0.776	0.779	0.782	0.785	0.7
0.8	0.788	0.791	0.794	0.797	0.8	0.802	0.805	0.808	0.811	0.813	0.8
0.9	0.816	0.819	0.821	0.824	0.826	0.829	0.831	0.834	0.836	0.839	0.9
1	0.841	0.844	0.846	0.849	0.850	0.853	0.855	0.858	0.860	0.862	1
1.1	0.864	0.867	0.869	0.871	0.873	0.875	0.877	0.879	0.881	0.883	1.1
1.2	0.885	0.887	0.889	0.891	0.893	0.894	0.896	0.898	0.9	0.901	1.2
1.3	0.903	0.905	0.907	0.908	0.91	0.911	0.913	0.915	0.916	0.918	1.3
1.4	0.919	0.921	0.922	0.924	0.925	0.926	0.928	0.929	0.931	0.932	1.4
1.5	0.933	0.934	0.936	0.937	0.938	0.939	0.941	0.942	0.943	0.944	1.5
1.6	0.945	0.946	0.947	0.948	0.949	0.951	0.952	0.953	0.954	0.954	1.6
1.7	0.955	0.956	0.957	0.958	0.959	0.96	0.961	0.962	0.962	0.963	1.7
1.8	0.964	0.965	0.966	0.966	0.967	0.968	0.969	0.969	0.97	0.971	1.8
1.9	0.971	0.972	0.973	0.973	0.974	0.974	0.975	0.976	0.976	0.977	1.9
2	0.977	0.978	0.978	0.979	0.979	0.98	0.98	0.981	0.981	0.982	2
2.1	0.982	0.983	0.983	0.983	0.984	0.984	0.985	0.985	0.985	0.986	2.1
2.2	0.986	0.986	0.987	0.987	0.987	0.988	0.988	0.988	0.989	0.989	2.2
2.3	0.989	0.99	0.99	0.99	0.99	0.991	0.991	0.991	0.991	0.992	2.3
2.4	0.992	0.992	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.994	2.4
2.5	0.994	0.994	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	2.5
2.6	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	0.996	2.6
2.7	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	2.7
2.8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	2.8
2.9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	2.9

Distribučná funkcia normálneho normovaného rozdelenia pravdepodobnosti $\xi \sim N(0;1)$

$n :$	$\chi^2_{0.01;(n)}$	$\chi^2_{0.025;(n)}$	$\chi^2_{0.05;(n)}$	$\chi^2_{0.95;(n)}$	$\chi^2_{0.975;(n)}$	$\chi^2_{0.99;(n)}$	$n :$
1	6.635	5.024	3.841	0.004	0.001	0	1
2	9.21	7.378	5.991	0.103	0.051	0.02	2
3	11.345	9.348	7.815	0.352	0.216	0.115	3
4	13.277	11.143	9.488	0.711	0.484	0.297	4
5	15.086	12.833	11.07	1.145	0.831	0.554	5
6	16.812	14.449	12.592	1.635	1.237	0.872	6
7	18.475	16.013	14.067	2.167	1.69	1.239	7
8	20.09	17.535	15.507	2.733	2.18	1.646	8
9	21.666	19.023	16.919	3.325	2.7	2.088	9
10	23.209	20.483	18.307	3.94	3.247	2.558	10
11	24.725	21.92	19.675	4.575	3.816	3.053	11
12	26.217	23.337	21.026	5.226	4.404	3.571	12
13	27.688	24.736	22.362	5.892	5.009	4.107	13
14	29.141	26.119	23.685	6.571	5.629	4.66	14
15	30.578	27.488	24.996	7.261	6.262	5.229	15
16	32	28.845	26.296	7.962	6.908	5.812	16
17	33.409	30.191	27.587	8.672	7.564	6.408	17
18	34.805	31.526	28.869	9.39	8.231	7.015	18
19	36.191	32.852	30.144	10.117	8.907	7.633	19
20	37.566	34.17	31.41	10.851	9.591	8.26	20
21	38.932	35.479	32.671	11.591	10.283	8.897	21
22	40.289	36.781	33.924	12.338	10.982	9.542	22
23	41.638	38.076	35.172	13.091	11.689	10.196	23
24	42.98	39.364	36.415	13.848	12.401	10.856	24
25	44.314	40.646	37.652	14.611	13.12	11.524	25
26	45.642	41.923	38.885	15.379	13.844	12.198	26
27	46.963	43.195	40.113	16.151	14.573	12.879	27
28	48.278	44.461	41.337	16.928	15.308	13.565	28
29	49.588	45.722	42.557	17.708	16.047	14.256	29
30	50.892	46.979	43.773	18.493	16.791	14.953	30
40	63.691	63.691	55.758	26.509	24.433	22.164	40
50	76.154	76.154	67.505	34.764	32.357	29.707	50
60	88.379	88.379	79.082	43.188	40.482	37.485	60
70	100.425	100.425	90.531	51.739	48.758	45.442	70
80	112.329	112.329	101.879	60.391	57.153	53.54	80
120	158.95	158.95	146.567	95.705	91.573	86.923	120

Kritické hodnoty χ^2 -kvadrát rozdelenia

Literatúra

Zdroje

- J. L. Buchanan, P. R. Turner - *Numerical Methods and Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1992.
- B. Dorociaková, I. Pobočíková - *Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky*, EDIS, Žilina 2005.
- J. Chajdiak, E. Rublíková, M. Gudába - *Štatistické metódy v praxi*, STATIS Bratislava 1994.
- M. Kaukič - *Numerická analýza I. Základné problémy a metódy*, MC Energy, Žilina, 1998.
- S. G. Michlin, Ch. L. Smolickij - *Približné metódy riešenia diferenciálnych a integrálnych rovníc*, Alfa, Bratislava 1974.
- P. Příkryl - *Numerické metody matematické analýzy*, SNTL 1985.
- A. Ralston - *Základy numerické matematiky*. Praha, Academia 1978.
- Z. Riečanová - *Numerické metódy a matematická štatistika*, Alfa, Bratislava, 1987.
- I. Růžicková, R. Hlavička - *Numerické metódy*, online.
- E. Vitásek - *Numerické metody*, Praha, SNTL 1987.