RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.1 - Komplexné čísla

1.) Vypočítajte súčet, rozdiel, súčin a podiel komplexných čísel z_1 a z_2. [1]

$$z_1 = i$$
$$z_2 = 1$$

$$z_1 = 1 + i$$
$$z_2 = 1 - i$$

$$z_1 = 4 - i$$
$$z_2 = 1 + 7i$$

$$z_1 = 2 + 3i$$
$$z_2 = 3 - 2i$$

$$z_1 = -5 + 2i$$
$$z_2 = -2 + 5i$$

2.) Vypočítajte reálnu a imaginárnu zložku komplexného čísla z.

$$z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} + 2i^5$$

$$z = [i(i+1) + (i+2)(i+3)]^2$$

$$z = \frac{1+i+2i^2-3i^3+i^4+i^5+i^6}{1-5i}$$

$$z = i^{35} + 7i^{15} - 3i^{30}$$

$$z = (-2+3i)^2 i^5 + \frac{13-26i}{3+2i} - (1-i)(1+i)$$

3.) Transformujte komplexné číslo z tzv. *algebrického tvaru* do tzv. *goniometrického tvaru.*[2]

$$z = -1 + i$$

$$z = \sqrt{3} - i$$

$$z = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i$$

---

[1] Ak $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$, potom

- ⋆ $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$
- ⋆ $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
- ⋆ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{z_2^*}{z_2^*} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$

[2] Komplexné číslo v algebrickom tvare je definované dvojicou čísel a (*reálna zložka*) a b (*imaginárna zložka*) prostredníctvom vzťahu $z = a + ib$. To isté komplexné číslo môžeme vyjadriť aj tzv. goniometrickom tvare. V takom prípade je definované inou dvojicou veličín: *veľkosťou* $|z|$ a *uhlom* φ prostredníctvom vzťahu $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ak a a b je známe, potom platí: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$.

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

4.) Nájdite celočíselnú mocninu komplexného čísla z^n, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.[3]

$z = -1 + i$, $n = 6$

$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $n = 9$

$z = -3 - 3i$, $n = 4$

$z = 2 + 2i$, $n = 3$

5.) Nájdite odmocninu komplexného čísla $\sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.[4]

$z = 1$, $n = 4$

$z = i$, $n = 3$

$z = 1 + i$, $n = 3$

$z = 1 - \sqrt{3}i$, $n = 2$

[3] Využite tzv. *Moivreov vzorec* $z^n = |z|^n \left(\cos[n\varphi] + i \sin[n\varphi]\right)$.
[4] Využite vzťah $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left[\frac{\varphi}{n}\right] + i \sin\left[\frac{\varphi}{n}\right]\right)$.