RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.6 - Hodnosť matice a Inverzná matica

1.) Je daná štvorcová matica $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times m}$. Nájdite jej hodnosť $h(\mathbf{A})$.[1]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

2.) Je daná obdĺžniková matica $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$. Nájdite jej hodnosť $h(\mathbf{A})$. [2]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.) Je daná štvorcová matica $\mathbf{A}$. Zistite, či je invertibilná[3] a ak áno, potom nájdite jej inverznú maticu $\mathbf{A}^{-1}$ použitím *Gaussovej eliminačnej metódy*[4].

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Hodnosť matice je číslo, ktoré udáva počet lineárne nezávislých vektorov, obsiahnutých v matici. Techniku na zistenie lineárnej nezávislosti vektorov $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$ ste si precvičili v DÚ 3. Alternatívne môžete na vyšetrenie lineárnej nezávislosti využiť determinant. Pravdepodobne najpraktickejšia cesta k výsledku vedie cez úpravu matice ekvivalentnými riadkovými úpravami na *trojuholníkový stupňovitý tvar* (tu počet nenulových riadkov je priamo rovný hodnosti matice).

[2] Platí, že $h(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$. Inými slovami ak má daná matica menej stĺpcov ako riadkov, zameriame sa na počet lineárne nezávislých stĺpcových vektorov. V opačnom prípade sa zameriame na riadkové vektory.

[3] Štvorcová matica $\mathbf{A}$ je invertibilná len ak je regulárna, t.j. $|\mathbf{A}| \neq 0$.

[4] Zostrojíme rozšírenú maticu $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$. Nad touto maticou budeme robiť LEN riadkové úpravy až kým ju neupravíme do tvaru $(\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$.

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4.) Je daná štvorcová matica $\mathbf{A}$. Zistite, či je invertibilná a ak áno, potom nájdite jej inverznú maticu zo vzťahu $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

5.) Sú dané štvorcové matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$. Nájdite maticu $\mathbf{X}$ tak, aby platilo $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$. [5]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

[5] Ak je matica $\mathbf{A}$ invertibilná, potom nájdeme $\mathbf{A}^{-1}$ a vypočítame $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.