RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.9 - Vektorová algebra

1.) Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$.[1]

$\vec{a} = (1, 1)$
$\vec{b} = (3, -2)$

$\vec{a} = (-2, 1)$
$\vec{b} = (1, 2)$

$\vec{a} = (1, -1, 2)$
$\vec{b} = (-1, 1, 1)$

$\vec{a} = (2, 3, -2)$
$\vec{b} = (1, -5, 4)$

2.) Umiestnením bodov A, B, C je v priestore daný trojuholník $\triangle_{ABC}$. Vypočítajte jeho obvod a veľkosti všetkých vnútorných uhlov.[2]

$A = [2, -4, 9], B = [-1, -4, 5], C = [6, -4, 6]$

$A = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right], B = [1, 1, 1], C = \left[-\frac{\sqrt{6}}{2} + 1, \frac{\sqrt{6}}{2} + 1, 1\right]$

3.) Dané sú vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Výpočtom overte, že platí $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ a $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.[3]

$\vec{a} = (1, -2, 3)$
$\vec{b} = (-1, 2, 1)$
$\vec{c} = (2, 0, 1)$

$\vec{a} = (0, 1, 2)$
$\vec{b} = (1, 2, 0)$
$\vec{c} = (2, 1, 0)$

---

[1] V priestore $\mathbb{R}^n$ pre skalárny súčin platí: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. Špeciálne pre 2D priestor $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ a pre 3D priestor $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

[2] Vytvoríme vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ktoré vystihujú jednotlivé strany trojuholníka. Obvod je súčtom ich veľkostí, t.j. $O = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$. Uhly vypočítame zo vzťahu $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Pri výpočtoch uhlov pozor na to kam vektory ukazujú!

[3] Vektorový súčin je definovaný pomocou determinantu $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, kde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ a $\vec{k} = (0, 0, 1)$ sú ortonormálne bázové vektory karteziánskej súradnicovej sústavy.

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

4.) Umiestnením bodov A, B, C je v priestore daný trojuholník $\triangle_{ABC}$. Vypočítajte jeho plošný obsah.[4]

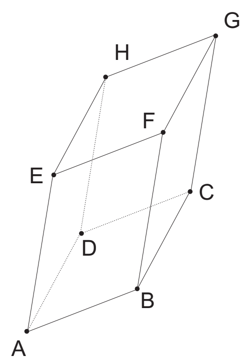
$$A = [7, 3, 4], B = [1, 0, 6], C = [4, 5, -2]$$

$$A = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right], B = [1, 1, 1], C = \left[-\frac{\sqrt{6}}{2} + 1, \frac{\sqrt{6}}{2} + 1, 1\right]$$

5.) Umiestnením bodov A, B, C, E je v priestore daný rovnobežnosten ABCDEFGH. Vypočítajte jeho objem.[5]

$$A = [1, 0, 4], B = [1, 1, 1], C = [1, -1, 1], E = [2, 2, 5]$$

$$A = [2, 1, 0], B = [3, 5, 1], C = [-1, 2, 2], E = [1, 4, 7]$$



Obr. 1: Označenie vrcholov rovnobežnostena ABCDEFGH.

[4]Plošný obsah rovnobežníka, ktorého dve priľahlé hrany definujú vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ vypočítame ako $S_\Diamond = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Z toho vyplýva, že plošný obsah trojuholníka, ktorého dve priľahlé hrany definujú vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ vypočítame ako $S_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

[5]Objem rovnobežnostena, ktorého priľahlé hrany vystihujú vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ vypočítame pomocou vzťahu $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$. Pritom pre zmiešaný súčin platí $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.