RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.10 - Funkcie[1]

1.) Určte definičný obor funkcie $f(x)$.[2][3]

$f(x) = \frac{x}{e^x - 2}$

$f(x) = \frac{2^x}{2^x + 4^x - 2}$

$f(x) = 3^{\frac{x}{x^2-2}}$

2.) Určte definičný obor funkcie $f(x)$.[4]

$f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x+4}}$

$f(x) = \sqrt{3x - x^2}$

$f(x) = \sqrt{\frac{2x-x^2}{x+5}}$

3.) Určte definičný obor funkcie $f(x)$.[5]

$f(x) = \ln(16x - x^3)$

$f(x) = \ln(\cos x)$

$f(x) = \log \frac{x+2}{x^2+1}$

4.) Určte definičný obor funkcie $f(x)$.[6]

$f(x) = \arcsin(2x^2 + 1)$

$f(x) = \arccos(12 - 7x)$

$f(x) = \arcsin \frac{3x}{x+5}$

---

[1] Nech D a H sú neprázdne množiny (nie nutne číselné, ale v matematike to tak väčšinou býva). Ak každému prvku $x \in D$ priradíme práve jeden prvok $y \in H$, potom hovoríme, že na množine D je definovaná funkcia f a píšeme $y = f(x)$.

[2] *Definičný obor* funkcie $f(x)$ (ozn. $D(f)$) je množina všetkých čísel, pre ktoré je daná funkcia definovaná a býva dobrým zvykom, že je uvedený spolu s funkciou $f(x)$. Ak tomu tak nie je, potom sa pod touto množinou rozumie tzv. *prirodzený* alebo *maximálny definičný obor*, čo je množina všetkých čísel, ktorým je daná funkcia $f(x)$ schopná priraďovať funkčné hodnoty.

[3] Lomená funkcia $f(x) = \frac{1}{x}$ je elementárna funkcia, ktorej definičným oborom je množina všetkých reálnych čísel okrem nuly, t.j. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

[4] Párna odmocnina $f(x) = \sqrt[n]{x}$ (n-párne prirodzené číslo) je elementárna funkcia, ktorej definičným oborom je množina všetkých nezáporných čísel, t.j. $D(f) = \langle 0, \infty)$.

[5] Funkcia logaritmus $f(x) = \log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+$) je elementárna funkcia, inverzná k exponenciálnej funkcii. Jej definičným oborom je množina všetkých kladných čísel, t.j. $D(f) = (0, \infty)$.

[6] Cyklometrické funkcie $\arcsin x$ a $\arccos x$ sú elementárne funkcie, inverzné k funkciám $\sin x$ a $\cos x$. Ich definičným oborom je množina $\langle -1, 1\rangle$.

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

5.) Určte definičný obor funkcie $f(x)$.[7]

$f(x) = \log \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

6.) Sú dané funkcie $f(x)$ a $g(x)$. Nájdite zložené funkcie $f(g(x))$ a $g(f(x))$ a vyšetrite ich definičný obor.

$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = |x| + 3,\ g(x) = (x-3)^2$

$f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ g(x) = \sqrt{x}$

7.) Načrtnite graf funkcie $f(x)$.

$f(x) = x + |x|$

$f(x) = \frac{1}{x} + 1$

$f(x) = |x-1| + 2|x+3|$

$f(x) = x + \sin x$

8.) Určte definičný obor funkcie $f(x)$ a zistite, či je párna alebo nepárna.[8]

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$f(x) = x^2 - 1$

$f(x) = |x|$

$f(x) = xe^{-x^2}$

$f(x) = \mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

9.) Zistite, či funkcia $f(x)$ je periodická. Ak áno, nájdite jej základnú periódu.[9]

$f(x) = |\sin x|$

$f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}$

$f(x) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}x\right)$

[7] V príklade č.5 vyšetrujeme kompozíciu viacerých funkcií s obmedzeným definičným oborom. Je potrebné obmedziť definičný obor zloženej funkcie tak, aby každá zo zúčastnených funkcií dokázala generovať priradenia.

[8] Funkcia $f(x)$ je párna, ak pre $\forall x \in D(f)$ platí $f(x) = f(-x)$. Geometricky to znamená, že funkcia je osovo symetrická cez os y. Funkcia $f(x)$ je nepárna, ak pre $\forall x \in D(f)$ platí $f(x) = -f(-x)$. Geometricky to znamená, že funkcia je bodovo symetrická cez začiatok súradnicovej sústavy.

[9] Funkcia $f(x)$ je periodická, ak $\exists T \in \mathbb{R}$, také že pre $\forall x \in D(f)$ platí: $f(x) = f(x+T)$. Potom najmenšie číslo T s touto vlastnosťou nazývame základnou periódou funkcie.

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

10.) Zistite, či funkcia $f(x)$ je prostá. Ak áno, nájdite k nej inverznú funkciu.[10]

$f(x) = \frac{1}{2x-1}$

$f(x) = \frac{5x+3}{x-2}$

$f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$

[10]Funkcia $f(x)$ je prostá, ak akékoľvek dva rôzne prvky definičného oboru majú priradené vždy rôzne funkčné hodnoty. T.j. ak pre $\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2$ platí: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Len k prostej funkcii existuje inverzná funkcia $f^{-1}(x)$. Platí: $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(f^{-1})$. Definícia inverznej funkcie: $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.