

Domáca úloha č.11 - Limita funkcie

1.) Vypočítajte limitu funkcie $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ sú polynómy stupňa n a m a číslo $a \in \mathbb{R}$ je koreňom oboch polynómov. Limita vedie na neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$.¹

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3x - 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^3 - 1}$$

2.) Vypočítajte limitu funkcie $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ sú polynómy stupňa n a m . Limita vedie na väčšinou na neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$.²

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 3x^3 + 9x}{4x^4 + 8x^2 + 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 4}{x^4 - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 1}{x^2 + x + 4}$$

3.) Vypočítajte limitu funkcie s odmocninami pre $x \rightarrow a$, ktorá vedie na neurčitý výraz $\frac{0}{0}$.³

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3 + 2x} - \sqrt{x + 2}}{3x + 3}$$

¹Fakt, že číslo a je koreňom oboch polynómov má za dôsledok, že oba polynómy možno deliť bezozvyšku výrazom $x - a$. Preto sa neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ zbavíme takto:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{P_n(x)}{x-a}}{\frac{Q_m(x)}{x-a}}$$

²Snahou je odstrániť neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$. Využijeme pri tom limitu $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$, pre $\forall k > 0$. Rozšírime limitovanú funkciu nasledovne: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^m} P_n(x)}{\frac{1}{x^m} Q_m(x)}$.

³V príkladoch tohto typu sa na odstránenie odmocnín zvyčajne využívajú vzťahy $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$, ...

4.) Vypočítajte limitu s goniometrickými funkciami pre $x \rightarrow a$, ktorá vedie na neurčitý výraz $\frac{0}{0}$.⁴

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$$

5.) Vypočítajte limitu funkcie pre $x \rightarrow \infty$, vedúcu na neurčitý výraz 1^∞ .⁵

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x+1} \right)^{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x+5} \right)^{3x-1}$$

⁴V príkladoch tohto typu sa zvyčajne využíva limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

⁵V príkladoch tohto typu sa zvyčajne využíva limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \doteq 2,71828 \equiv e$.