RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.14 - Aplikácie diferenciálneho počtu

Vyšetrovanie priebehu funkcie

Vyšetrite priebeh funkcie $f(x)$. Pod vyšetrením jej priebehu sa myslí určiť definičný obor $D(f)$, obor hodnôt $H(f)$, priesečníky s osami (tzv. nulové body)[1], vyšetriť párnosť[2], nepárnosť[3], periodicitu[4], zistiť či je funkcia prostá[5] a či k nej existuje inverzná funkcia (ak áno, nájsť ju). Ďalej určiť intervaly monotónnosti[6], izolovať lokálne extrémy[7], určiť intervaly konvexnosti a konkávnosti[8], izolovať inflexné body [9], nájsť rovnice asymptôt[10]. Napokon čo najdetailnejšie nakresliť graf funkcie, rešpektujúc zistené fakty.

1. $f(x) = \frac{x^3}{2(1+x)}$
2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
3. $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$
4. $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$
5. $f(x) = \frac{8}{x^3} + \frac{x^2}{2}$
6. $f(x) = \frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$
7. $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

[1] Priesečník s osou x má súradnice $[x_0, 0]$, kde platí $f(x_0) = 0$. Priesečník s osou y má súradnice $[0, y_0]$, kde platí $y_0 = f(0)$.

[2] Funkcia je párna ak pre $\forall x \in D(f)$ platí: $f(x) = f(-x)$.

[3] Funkcia je nepárna ak pre $\forall x \in D(f)$ platí: $f(x) = -f(-x)$. Pozor, ak funkcia nie je párna, neznamená to automaticky že je nepárna!

[4] Funkcia je periodická ak existuje také reálne číslo $L \neq 0$, že pre $\forall x \in D(f)$ platí: $f(x) = f(x+T)$. Potom číslo L sa volá *perióda* funkcie. Najmenšia z periód sa nazýva *základná perióda* a všetky ostatné periódy sú jej celočíselnými násobkami.

[5] Funkcia je prostá ak pre $\forall x_1, x_2 \in D(f)$, také že $x_1 \neq x_2$ platí: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

[6] Funkcia je na intervale $I \subseteq D(f)$ monotónna ak je len rastúca, alebo len klesajúca. Funkcia je na intervale I rastúca, ak pre $\forall x \in I$ platí: $f'(x) > 0$. Naopak, funkcia klesá ak $f'(x) < 0$.

[7] Funkcia má v bode $x_0 \in D(f)$ *ostré lokálne maximum* ak je v jeho ľavom okolí rastúca a v pravom okolí klesajúca. *Ostré lokálne minimum* má ak je v jeho ľavom okolí klesajúca a v pravom okolí rastúca. Lokálne extrémy môžu byť dvoch typov.

- V prvom prípade je v bode x_0 prvá derivácia definovaná a spojitá. Vtedy platí $f'(x_0) = 0$,
- v druhom prípade je v bode x_0 prvá derivácia nespojitá. Takýto lokálny extrém je špicatý.

[8] Funkcia je na intervale I konvexná, ak pre $\forall x \in I$ platí: $f''(x) > 0$. Konkávna ak $f''(x) < 0$.

[9] V inflexnom bode $x_0 \in D(f)$ platí $f''(x_0) = 0$

[10] Asymptota je priamka, ku ktorej sa funkcia približuje v nekonečne (nekonečne ďaleko v smere osi x, alebo nekonečne vysoko v smere osi y). Asymptota so smernicou je vyjadrená rovnicou $y = kx + q$ a pre jej koeficienty platí: $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx$. Asymptota k funkcii, ktorá v bode $x = c$ diverguje do nekonečna je vertikálna a zvykneme ju nazývať *asymptotou bez smernice*. Vystihuje ju rovnica $x = c$.

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

8. $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$
9. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
10. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$