RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.13

Homogénna DR n-tého stupňa s konštantnými koeficientami

Diagnostikujte zadanú DR. Ak sa jedná o Homogénnu DR n-tého stupňa s konštantnými koeficientami[1], potom nájdite jej všeobecné riešenie[2].

1. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$
2. $y'' - 9y = 0$
3. $y'' + 7y' = 0$ [3]
4. $y'' + 2y' + y = 0$ [4]
5. $2y'' - 6y' + y = 0$
6. $y'' + 9y = 0$ [5]
7. $y'' + y' + y = 0$
8. $2y'' - 6y' + y = 0$
9. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$
10. $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$

[1] Homogénnu DR n-tého rádu s konštantnými koeficientami poznáme podľa toho, že sa dá upraviť do tvaru $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}y'' + a_{n-1}y' + a_n y = 0$. Nezamienajte si ju s homogénnou DR 1.st, s ktorou okrem podobného názvu nemá veľa spoločného.

[2] Fundamentálne riešenia hľadáme v tvare $y_i = e^{\lambda_i x}$, kde $i \in \{1, \ldots, n\}$. Konštanty λ_i nájdeme riešením charakteristického polynómu $\lambda^{(n)} + a_1\lambda^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$. Všeobecné riešenie nájdeme lineárnou kombináciou fundamentálnych riešení: $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$.

[3] Túto DR je možné riešiť aj technikou zníženia rádu.

[4] Ak je riešením charakteristického polynómu k-násobný koreň $\lambda_j = \cdots = \lambda_{j+k-1}$, potom tejto k-tici prislúchajú fundamentálne riešenia: $y_j = e^{\lambda x}, y_{j+1} = xe^{\lambda x}, \ldots, y_{j+k-1} = x^{k-1}e^{\lambda x}$.

[5] Ak je riešením charakteristického polynómu dvojica komplexne združených koreňov $\lambda_j = a_j + \mathrm{i}b_j$ a $\lambda_{j+1} = a_{j+1} - \mathrm{i}b_{j+1}$, potom tejto dvojici prislúcha dvojica fundamentálnych riešení $y_j = e^{ax}\cos bx$ a $y_{j+1} = e^{ax}\sin bx$.

RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Nehomogénna DR n-tého stupňa s konštantnými koeficientami

Diagnostikujte zadanú DR. Ak sa jedná o neomogénnu DR n-tého rádu s konštantnými koeficientami[6], potom nájdite jej všeobecné riešenie[7].

11. $y''' + 2y'' + 5y' = x,$ [8]
12. $3y'' - 4y' = 3e^x$
13. $3y'' - 4y' = 4e^{\frac{4}{3}x}$
14. $9y'' - 6y' + y = 4e^{-\frac{x}{3}}$
15. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x,$ [9]
16. $y'' - y' - 6y = xe^{3x}$
17. $y'' + y = \operatorname{tg} x$
18. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$
19. $y'' + 3y' + 2y = e^{3x}$

[6] Nehomogénnu DR n-tého rádu s konštantnými koeficientami poznáme podľa toho, že sa dá upraviť do tvaru $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}y'' + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$.

[7] Najprv vyriešime príslušnú homogénnu DR a nájdeme jej všeobecné riešenie $y_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i y_{0i}$. Potom nájdeme tzv. partikulárne riešenie y_p metódou variácie konštanty alebo metódou neurčitých koeficientov. Všeobecné riešenie nehomogénnej DR má tvar: $y = y_0 + y_p$.

[8] Vhodné použiť metódu neurčitých koeficientov, pretože pravá strana má tvar $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, kde $P_n(x)$ je polynóm n-tého stupňa. Ak α je k-násobným koreňom charakteristického polynómu, potom partikulárne riešenie navrhneme v tvare $y_p = Q_n(x)x^k e^{\alpha x}$, pričom Q_n je všeobecný polynóm n-tého stupňa.

[9] Vhodné použiť metódu variácie konštanty, pretože pravá strana nemá špeciálny tvar. Ak y_i je systém fundamentálnych riešení homogénnej DR, W_i sú príslušné wronskiány a $c_i(x) = \int \frac{W_i}{W}\,\mathrm{d}x$, potom partikulárne riešenie nájdeme lineárnou kombináciou $y_p = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$.