RNDr. Ján ŠIMON, PhD.
e-mail: jan.simon@fstroj.uniza.sk
konzultácie: AD-107, KAM, SjF, ŽU

Domáca úloha č.14

Homogénny systém diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami

Zistite, či daná sústava diferenciálnych rovníc je homogénna[1]. Ak áno, nájdite jej všeobecné riešenie[2].

1. $\begin{aligned} x' &= -5x + 2y \\ y' &= x - 6y \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= 8x - y \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x' &= y + z \\ y' &= z \\ z' &= y \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x' &= 3x - y + z \\ y' &= -x + 5y - z \\ z' &= x - y + 3z \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x' &= 4x - y - 2z \\ y' &= 2x + y - 2z \\ z' &= x - y + z \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x' &= -x + y + z \\ y' &= x - y + z \\ z' &= x + y + z \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x' &= 6x - 12y - z \\ y' &= x - 3y - z \\ z' &= -4x + 12y + 3z \end{aligned}$

[1] Sústavy diferenciálnych rovníc sa zvyknú elegantne zapisovať pomocou vektorov a matíc. Napríklad ak hľadáme dve funkcie $x(t)$ a $y(t)$, ktoré vyhovujú rovniciam $x' = x + y$ a $y' = x - y$, potom túto úlohu môžeme preformulovať nasledovne: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ak teraz označíme $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ a maticu systému $\mathbf{A}$, potom píšeme skrátene $\vec{\xi}' = \mathbf{A} \cdot \vec{\xi}$. Sústavy diferenciálnych rovníc, ktoré je možné upraviť do tohto tvaru nazývame *homogénne*. Sústava v tvare $\vec{\xi}' = \mathbf{A} \cdot \vec{\xi} + \beta(t)$ sa nazýva *nehomogénna*.

[2] Pri hľadaní riešenia je možné postupovať dvoma spôsobmi.

- Eliminačná metóda: vyjadriť jednu funkciu, dosadiť do zvyšných rovníc, opakovať kým neostane len jedna DR.
- Maticová metóda: nájsť vlastné čísla λ_i a vlastné vektory $\vec{v}_i$ matice $\mathbf{A}$. Ak medzi vlastnými číslami nie sú násobné ani komplexné korene, potom všeobecné riešenie má tvar: $\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i e^{\lambda_i t}$.